

Kapitola 1

Základní poznatky z matematiky

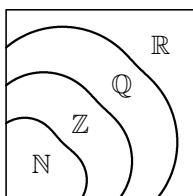
1.1 Základní vztahy

Definice je vymezení matematického pojmu pomocí pojmů základních nebo pojmů definovaných dříve.

Matematická věta je tvrzení, jehož pravdivost má být dokázána. Při jejím důkazu se vychází z vět dokázaných již dříve, popř. z axiomů, což jsou tvrzení, která se přijímají za pravdivá bez důkazů.

1.1.1 Číselné obory

\mathbb{N} - naturální - přirozená	$\{1; 2; 3; \dots\}$ - základ elementární matematiky
\mathbb{Z} - celá	$\{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$
\mathbb{Q} - racionální	např. $\frac{1}{2}; -5,25; 0; 3,6; -2\frac{1}{2}; 5; 1,16\overline{33}$
\mathbb{R} - reálná	např. $\sqrt{2}; -5; 0,4; \pi; \sin 60^\circ$



$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Dále můžeme stávající množiny rozšiřovat či omezovat, např. \mathbb{N}_0 značí množinu přirozených čísel rozšířených o nulu; \mathbb{R}^+ množinu reálných kladných čísel nebo \mathbb{R}_0^+ množinu nezáporných reálných.

1.1.2 Obor přirozených čísel

Věty o uzavřenosti:

Součtem i součinem přirozených čísel dostaneme opět přirozené číslo.

$$a + b \in \mathbb{N} \quad a \cdot b \in \mathbb{N} \tag{U}$$

Věty o komutativnosti:

$$a + b = b + a$$

$$a \cdot b = b \cdot a \tag{K}$$

Věty o asociativnosti:

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \tag{A}$$

Věta o distributivnosti:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \tag{D}$$

Věta o neutrálnosti:

$$a \cdot 1 = a \quad (\text{N})$$

Podobné vlastnosti má i obor celých, racionálních a reálných čísel. Navíc ještě platí u vět o neutrálnosti:
 $a + 0 = a$

1.1.3 Základní vlastnosti racionálních čísel

Platí věty (A), (K), (D), (N) a u (U) navíc $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$; $b \neq 0$.

zlomek v základním tvaru - $\frac{p}{q}$ p ; q - nesoudělná

Když chceme porovnat racionální čísla vyjádřena zlomky, musíme je nejprve převést na společného jmenovatele a poté porovnáme čitatele.

Racionální čísla můžeme zapisovat ve tvaru:

- **zlomku**
- **desetinného čísla** (tj. číslo s konečným desetinným rozvojem ve tvaru $\frac{a}{10^n}$)
- **nekonečného periodického desetinného rozvoje s vyznačenou periodou** ryze periodické $\rightarrow 0, \overline{32}$; neryze periodické s předperiodou $\rightarrow 3, 51\overline{28}$

1.1.4 Množiny

Množina je souhrn prvků. Určujeme ji výčtem všech jejích prvků nebo *charakteristickými vlastnostmi*
 $A = \{x \in \mathbb{Z}_0^+; x \leq 7\} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$

Def.: Nechť A ; B jsou množiny. Řekneme, že A je **podmnožinou** B právě tehdy, když platí, že každý prvek množiny A je zároveň prvkem B . Značíme $A \subset B$.

Pozn.: Podmnožina = Inkluze

Věta: Má-li množina n -prvků, pak počet jejích podmnožin je dán číslem 2^n .

Def.: Množiny A , B se rovnají právě tehdy, když platí $A \subset B \wedge B \subset A$.

Symbolem U označujeme obvykle základní množinu, symbolem \emptyset označujeme prázdnou množinu.

Operace s množinami

Def.: Nechť A , B jsou množiny. **Sjednocením** množin A a B nazveme množinu těch prvků, které patří alespoň do jedné z těchto dvou množin.

$$A \cup B = \{x \in U; x \in A \vee x \in B\}$$

Def.: Nechť A , B jsou množiny. **Průnikem** množin A a B nazveme množinu těch prvků, které patří současně do obou množin.

$$A \cap B = \{x \in U; x \in A \wedge x \in B\}$$

Def.: Pokud $A \cap B = \emptyset$, pak řekneme, že množiny A a B jsou **disjunktní**.

Def.: Necht $A \subset B$. **Doplňkem** množiny A , vzhledem k množině B (A'_B) je množina všech těch prvků B , které nepatří do A .

$$A'_B = \{x \in U; x \in B \wedge x \notin A\}$$

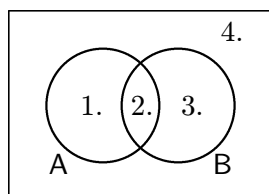
Def.: Necht A, B jsou množiny. **Rozdílem** A a B nazveme množinu všech těch prvků, které patří do množiny A a nepatří do množiny B .

$$A - B = \{x \in A \wedge x \notin B\}$$

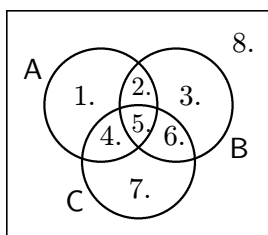
Věta: Pro každé dvě množiny platí:

$$\left. \begin{aligned} (A \cap B)' &= A' \cup B' \\ (A \cup B)' &= A' \cap B' \end{aligned} \right\} \text{De Morganova pravidla}$$

Vennovy diagramy



1. $A \cap B'$
2. $A \cap B$
3. $A' \cap B$
4. $A' \cap B'$



1. $A \cap B' \cap C'$
2. $A \cap B \cap C'$
3. $A' \cap B \cap C'$
4. $A \cap B' \cap C$
5. $A \cap B \cap C$
6. $A' \cap B \cap C$
7. $A' \cap B' \cap C$
8. $A' \cap B' \cap C'$

Průnik a sjednocení:

- **komutativnost** - $A \cup B = B \cup A$
 $A \cap B = B \cap A$
- **asociativnost** - $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$
 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$
- **neutralita** - $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$
 $A \cap U = U \cap A = A$
- **distributivnost** - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

1.1.5 Základy výrokové logiky

Výrok je sdělení, u něhož má smysl otázka, zda je či není pravdivé.

Negací výroku A rozumíme výrok: "Není pravda, že platí A ".

Značíme ji $\neg A$ (nebo A' ; \bar{A}).

JEDNODUCHÉ VÝROKY:

výrok	negace
aspoň a	nejvýše $a - 1$
nejvýš a	aspoň $a + 1$
právě a	nejvýše $a - 1$ nebo aspoň $a + 1$

Kvantifikátory

1. **obecný** (velký) kvantifikátor - symbolem obecnosti; značíme \forall
 $(\forall x \in \mathbb{R}; \dots \rightarrow$ pro všechna reálná čísla platí $\dots)$
2. **Existenční** (malý) kvantifikátor - značíme \exists
 $(\exists x \in \mathbb{R}; \dots \rightarrow$ existuje alespoň jedno x , pro které platí $\dots)$

Jestliže je výrok pravdivý, přiřazujeme mu výrokový znak 1; jestliže je nepravdivý, přiřazujeme mu znak 0.

Např.: $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \geq x$ 0
 $\forall x \in \mathbb{Z}; x^2 \geq x$ 1

Složené výroky

1. **Konjunkce** ... spojka "a" (ve smyslu a zároveň) $\rightarrow A \wedge B$
 - konjunkce výroku je pravdivá jen v případě, že jsou pravdivé oba výroky

A	\wedge	B
1	1	1
1	0	0
0	0	1
0	0	0

2. **Disjunkce** ... spojka "nebo" $\rightarrow A \vee B$
 - disjunkce výroku je pravdivá, je-li pravdivý aspoň jeden z výroků

A	\vee	B
1	1	1
1	1	0
0	1	1
0	0	0

3. **Implikace** ... spojka "jestliže, pak" $\rightarrow A \Rightarrow B$
 - implikace výroku je pravdivá, jen tehdy, je-li pravdivý výrok A i B nebo je-li výrok A nepravdivý.
 Implikace je **nekomutativní**

A	\Rightarrow	B
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0

4. **Ekvivalence** ... spojka "tehdy a jen tehdy; právě tehdy, když ..." $\rightarrow A \Leftrightarrow B$
 - ekvivalence výroku je pravdivá, jenom v případě, že oba výroky mají stejnou hodnotu pravdivosti

A	\Leftrightarrow	B
1	1	1
1	0	0
0	0	1
0	1	0

Negování složených výroků

$$\left. \begin{aligned} \neg(A \wedge B) &\Leftrightarrow \neg A \vee \neg B \\ \neg(A \vee B) &\Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B \end{aligned} \right\} \text{De Morganova pravidla}$$

\neg	(A	\wedge	B)	\Leftrightarrow	\neg	A	\vee	\neg	B
0	1	1	1	1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	1	0	1	1	0

\neg	(A	\vee	B)	\Leftrightarrow	\neg	A	\wedge	\neg	B
0	1	1	1	1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0	1	1	0

Negace implikace: $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$

Implikace a věta obrácená - $A \Rightarrow B$ a $B \Rightarrow A$ - nemají stejnou pravdivostní hodnotu. Stejnou pravdivostní hodnotu implikace $A \Rightarrow B$ má její OBMĚNA $\neg B \Rightarrow \neg A$. Na důkazu této obměny je založen **nepřímý důkaz**.

Důkaz sporem - Větu dokážeme sporem, odvodíme-li z její negace nějaký nepravdivý výsledek. Chceme dolázat, že pravdivostní hodnota výroku $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$ je 0.

1.1.6 Elementární teorie čísel

- týká se pouze \mathbb{N} resp. \mathbb{N}_0

Def.: Přírozené číslo $p > 1$ se nazývá **prvočíslo**, jestliže nemá jiné přírozené dělitele než 1 a p .

Def.: Přírozené číslo $n > 1$, které není prvočíslo, se nazývá **složené číslo**.

Věta: Každé složené číslo n je dělitelné aspoň jedním prvočíslem p , pro které platí

$$p \leq \sqrt{n}.$$

Zjistíme-li, že číslo n není dělitelné žádným prvočíslem p , pro které platí $p \leq \sqrt{n}$, pak je n prvočíslo.

Základní věta aritmetiky Každé přírozené číslo $n > 1$ lze zapsat jediným způsobem ve tvaru

$$n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \dots \cdot p_k^{r_k},$$

kde $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ jsou prvočísla a r_1, r_2, \dots, r_k jsou přírozená čísla.

1.1.7 Výrokové formy; rovnice

Výrokové formy - zápis obsahující proměnou (ne však kvantifikátor). Po dosazení za proměnou se z výrokové formy stává výrok.

Rovnice - výroková forma ve tvaru rovnosti (*rovnost = relace = vztah*)

Vlastnosti rovnosti - $\forall a \in \mathbb{R}; a = a$ - reflexivnost
 $\forall a, b \in \mathbb{R}; a = b \Rightarrow b = a$ - symetrie
 $\forall a, b, c \in \mathbb{R}; a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c$ - tranzitivita

Ekvivalentní úpravy - přičítání nebo odečítání jakéhokoli čísla nebo výrazu, který je definován v oboru rovnice

$$K_1 = K_2 = \dots = K_n$$

Důsledkové úpravy - úpravy, ponichž se množina kořenů rozšiřuje

$$K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_n$$

Ekvivalentní úpravou nemusí být násobení a dělení výrazem nebo umocnění obou stran.

1.1.8 Relace

Uspořádaná dvojice - dvojice, ve které záleží na pořadí

Kartézský součin

Def.: Necht A a B jsou množiny. Kartézským součinem nazveme množinu všech uspořádaných dvojic $[x; y]$, pro které platí $x \in A$; $y \in B$

$$A \times B = \{[x; y]; x \in A, y \in B\}$$

Pozn.: Kartézský součin není komutativní operace.

Binární relace

Def.: Binární relace z množiny A do množiny B se nazývá každá podmnožina kartézského součinu $A \times B$. Je-li $A = B$, pak mluvíme o binární relaci v množině A .

Vlastnosti relací:

Necht U je binární relace v A . Relace U se nazývá

1. **reflexivní** právě, když pro všechny prvky platí, že prvek je v relaci se sebou samým
 $\forall x \in A; [x; x] \in U$
2. **antireflexivní** právě, když platí
 $\forall x \in A; [x; x] \notin U$
3. **symetrická** právě, když platí
 $\forall x, y \in A; [x; y] \in U \Rightarrow [y; x] \in U$
4. **antisymetrická** právě, když platí
 $\forall x, y \in A; [x; y] \in U \wedge x \neq y \Rightarrow [y; x] \notin U$
5. **asymetrická** právě, když platí
 $\forall x, y \in A; [x; y] \in U \Rightarrow [y; x] \notin U$
6. **transitivní** právě, když platí
 $\forall x, y, z \in A; [x; y] \in U \wedge [y; z] \in U \Rightarrow [x; z] \in U$

Ekvivalence je binární relace, která je *reflexivní*, *symetrická*, a *transitivní* současně.

Kapitola 2

Funkce

2.1 Základní vztahy

Def.: Necht existují libovolné množiny \mathbb{A} , \mathbb{B} . **Zobrazení** množiny \mathbb{A} do množiny \mathbb{B} je předpis, který každému prvku $a \in \mathbb{A}$ jednoznačně přiřadí nejvýše jeden prvek $b \in \mathbb{B}$.

Def.: Necht existují libovolné množiny \mathbb{A} , $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}$. **Funkcí** se nazývá každé zobrazení f množiny \mathbb{A} do množiny \mathbb{B} . Množinu \mathbb{A} nazýváme definiční obor fce a značíme ji $\mathbb{D}(f)$.

Zápis fce:

$$\begin{aligned} n \in \mathbb{N} \quad x, y \in \mathbb{R}_0^+ \quad f : f(x) = y = \sqrt[n]{x} \\ f : [x, y] \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+; y = \sqrt[n]{x} \\ f : x \rightarrow \sqrt[n]{x} \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Graf fce: Grafem fce f ve zvolené soustavě souřadnic $0xy$ v rovině se nazývá množina všech bodů M , které budou mít souřadnice $M[x; f(x)]$, kde $x \in \mathbb{D}(f)$. Daný graf fce může být dán několika způsoby.

$$y_0 = f(x)$$

$$y = a \cdot f(bx + c) + d$$

a - "nafukuje" graf fce a krát

b - udává, kolikrát se "smrskne" nebo "natáhne"

c - posouvá po ose x do bodu $-\frac{c}{b}$

d - posouvá po ose y

Obor hodnot fce: Je dána fce f ; množina všech y z množiny \mathbb{B} ke kterým existuje alespoň jedno x z množiny \mathbb{A} tak, že $[x; y] \in f$ se nazývá obor hodnot fce f .

Sudá fce: graf fce *souměrný podle osy y*

f se nazývá sudá, právě když platí

1. $\forall x \in \mathbb{D}(f); -x \in \mathbb{D}(f)$
2. $\forall x \in \mathbb{D}(f); f(x) = f(-x)$

Lichá fce: graf fce je *středově souměrný podle středu souřadnic*

f se nazývá lichá, právě když platí

1. $\forall x \in \mathbb{D}(f); -x \in \mathbb{D}(f)$
2. $\forall x \in \mathbb{D}(f); f(-x) = -f(x)$

Rovnost fci: Fce f a g se rovnají, právě když

1. $\mathbb{D}(f) = \mathbb{D}(g)$
2. $\forall x \in \mathbb{D}(f); f(x) = g(x)$

Fce prostá: Nechť $x \in \mathbb{D}(f)$. Fce f se nazývá prostá, právě když pro každé dva prvky x_1, x_2 platí

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Rostoucí fce: Nechť $x \in \mathbb{D}(f)$. Fce f se nazývá rostoucí, právě když pro každé dva prvky x_1, x_2 platí

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Klesající fce: Nechť $x \in \mathbb{D}(f)$. Fce f se nazývá klesající, právě když pro každé dva prvky x_1, x_2 platí

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Konstantní fce: Nechť $x \in \mathbb{D}(f)$. Fce f se nazývá konstantní, právě když pro každé dva prvky x_1, x_2 platí

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

Neklesající fce: Nechť $x \in \mathbb{D}(f)$. Fce f se nazývá neklesající, právě když pro každé dva prvky x_1, x_2 platí

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

Nerostoucí fce: Nechť $x \in \mathbb{D}(f)$. Fce f se nazývá nerostoucí, právě když pro každé dva prvky x_1, x_2 platí

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

Klesající a rostoucí jsou **ryze monotónní fce**, nerostoucí a neklesající jsou **monotónní fce**.

2.1.1 Racionální fce

Fce daná rcí: $y = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0}$, pro $b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0 \neq 0$

Lineární fce

Def.: Lineární fce je každá fce na množině \mathbb{R} daná tvarem $y = ax + b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ je lineární člen a udává sklon grafu, b je absolutní člen a posouvá graf po ose y .

Grafem je přímka

$$\text{Platí: } a = \operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Kvadratická fce

Def.: Kvadratická je každá fce na množině \mathbb{R} daná tvarem $y = ax^2 + bx + c$, kde $a \neq 0$; $a, b, c \in \mathbb{R}$
Grafem je parabola

Věta: Pro průsečíky grafu x_1, x_2 s osou x (tj. pro kořeny rovnice ve tvaru $ax^2 + bx + c = 0$) platí tzv. Viětovy vzorce

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

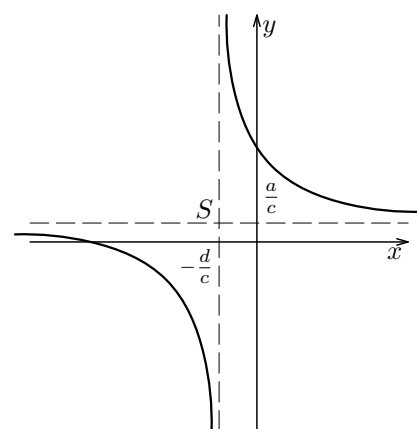
Věta: Každou kvadratickou fci můžeme napsat ve tvaru $y = a(x - x_v)^2 + y_v$, kde $V[x_v; y_v]$ je vrchol paraboly.

$$x_v = -\frac{b}{2a} \quad y_v = c - \frac{b^2}{4a}$$

Lineární lomená fce

Def.: Fce f určená rcí $y = \frac{ax + b}{cx + d}$, kde $c \neq 0 \wedge a \cdot d \neq b \cdot c$ se nazývá *lineární lomená fce*.

- Grafem je hyperbola se středem v bodě $S[-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}]$ a s asymptotami || se souřadnicovými osami.



Zvláštním případem lomené fce je **nepřímá úměra**

Def.: Fce f určená rcí $y = \frac{k}{x}$; $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ se nazývá *nepřímá úměra*.

2.1.2 Mocninná fce

$$y = x^n$$

1. $n \in \mathbb{N}$

- (a) pro n sudé \rightarrow fce sudá, graf podobný parabole
- (b) pro n liché \rightarrow fce lichá

2. $n \in \mathbb{Z}^- \Rightarrow \mathbb{D}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

- (a) pro n liché \rightarrow fce lichá, graf podobný grafu lineárně lomené fce
- (b) pro n sudé \rightarrow fce sudá

Inverzní fce

Def.: Nechť fce f je prostá. Fce f^{-1} se nazývá *inverzní fce* k fci f , když platí

$$\mathbb{D}(f) = \mathbb{H}(f^{-1})$$

$$\mathbb{D}(f^{-1}) = \mathbb{H}(f)$$

Věta: Ke každému nezápornému číslu existuje jednoznačně určená jeho druhá odmocnina.

Věta: Ke každému přirozenému číslu n a ke každému nezápornému reálnému číslu a existuje právě jedno takové nezáporné reálné číslo b , že platí $b^n = a$.

Def.: Toto číslo b se nazývá n -tá odmocnina z čísla a a zapisujeme $\sqrt[n]{a} = b$.

Pozn.: Pro n lichá bereme celou množinu \mathbb{R} .

Věty:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} &= \sqrt[n]{a \cdot b} & \forall a, b \in \mathbb{R}_0^+ \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} &= \sqrt[n]{\frac{a}{b}} & \forall a \in \mathbb{R}_0^+ \quad \forall b \in \mathbb{R}^+ \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ (\sqrt[n]{a})^s &= \sqrt[n]{a^s} & \forall a \in \mathbb{R}_0^+ \quad \forall s \in \mathbb{Z} \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} &= \sqrt[m \cdot n]{a} & \forall a \in \mathbb{R}_0^+ \quad \forall m, n \in \mathbb{N} \\ \sqrt[n]{a} &= a^{\frac{1}{n}} & \forall a \in \mathbb{R}_0^+ \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \sqrt[n]{\sqrt[p]{a^m}} &= \sqrt[n \cdot p]{a^m} & \forall a \in \mathbb{R}_0^+ \quad \forall m, n, p \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

2.1.3 Exponenciální fce

Def.: Exponenciální fce o základu a je fce na množině \mathbb{R} vyjádřená ve tvaru

$$y = a^x,$$

kde a je kladné reálné číslo různé od 1.

$$\mathbb{D}(f) = \mathbb{R}$$

$$\mathbb{H}(f) = \mathbb{R}^+$$

$a > 1 \dots$ rostoucí

$0 < a < 1 \dots$ klesající

2.1.4 Logaritmická fce

Def.: Logaritmická fce o základu a je fce, která je inverzní k exponenciální fci $y = a^x$; a je libovolné kladné reálné číslo různé od jedné. Zapisujeme

$$y = \log_a x$$

$$\mathbb{D}(f) = \mathbb{R}^+$$

$$\mathbb{H}(f) = \mathbb{R}$$

$a > 1 \dots$ rostoucí

$0 < a < 1 \dots$ klesající

Logaritmus

Def.: Logaritmem kladného reálného čísla x při základu a , kdy a je kladné reálné číslo různé od 1, nazveme takové reálné číslo y , kde $y = \log_a x$ tak, že platí $a^y = x$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad a \in \mathbb{R}^+ - \{1\};$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$x = a^{\log_a x}$$

Věty o logaritmech:

$$\forall a, c \in \mathbb{R}^+ - \{1\} \wedge \forall r, s, b \in \mathbb{R}^+$$

- $\log_a r \cdot s = \log_a r + \log_a s$
- $\log_a \frac{r}{s} = \log_a r - \log_a s$
- $\log_a r^s = s \log_a r$
- $\log_a \sqrt[s]{r} = \frac{1}{s} \log_a r$
- $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$
- $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

Přirozený logaritmus

$$y = \log_e x = \ln x$$

$e = 2.718281828 \dots \rightarrow$ **Eulerovo číslo**

2.1.5 Složená fce

Def.: Fce h je fce složená z fcí f a g , právě když platí

$$\mathbb{D}(h) = \{x \in \mathbb{D}(f); f(x) \in \mathbb{D}(g)\} \quad \forall x \in \mathbb{D}(h); h(x) = g(f(x))$$

$$h = g \circ f$$

Kapitola 3

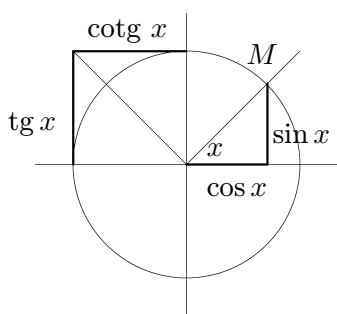
Goniometrické funkce

3.1 Základní vztahy

orientovaný úhel α - uspořádaná dvojice polopřímek VA, VB se společným počátkem V a značíme ho \widehat{AVB}

základní velikost: úhel, který leží v intervalu $\langle 0^\circ; 360^\circ \rangle = \langle 0; 2\pi \rangle$

$$\omega = \alpha + k \cdot 2\pi$$

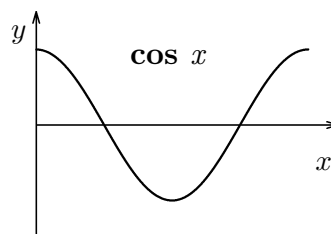
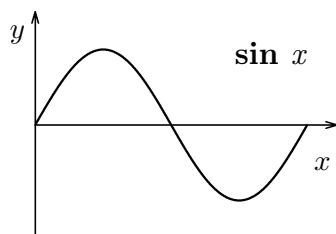


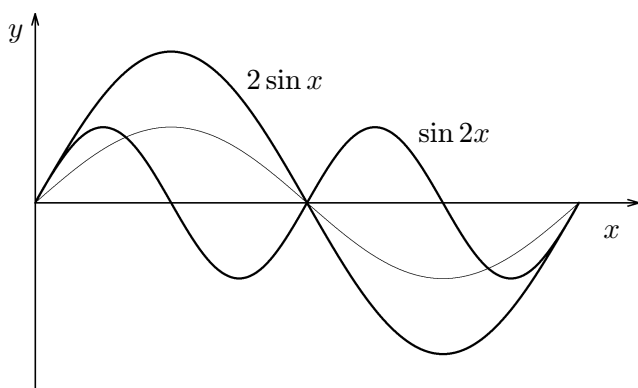
	$(0^\circ) \ 2\pi$	$(30^\circ) \ \frac{\pi}{6}$	$(60^\circ) \ \frac{\pi}{3}$	$(90^\circ) \ \frac{\pi}{2}$	$(45^\circ) \ \frac{\pi}{4}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	-	1
cotg	-	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	1

3.1.1 Funkce sinus a cosinus

Def.: Fce sinus je fce na množině reálných čísel, která každému $x \in \mathbb{R}$ přiřadí číslo y_M . (viz. obr. jednotkové kružnice)

Fce cosinus je fce na množině reálných čísel, která každému $x \in \mathbb{R}$ přiřadí číslo x_M .





$$y = f(x) \rightarrow y = a \cdot f(bx + c) + d$$

$$a \dots \mathbb{H}(f) = \langle -a; a \rangle$$

$$b \dots \text{mění periodu } \frac{2\pi}{|b|}$$

$$c \dots \text{posune ve směru osy } x \text{ do bodu } -\frac{c}{b}$$

$$d \dots \text{posune ve směru osy } y \text{ do bodu } d$$

3.1.2 Fce tg a cotg

Def.: Fce tangens se nazývá fce daná vztahem $y = \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$.

Fce kotangens se nazývá fce daná vztahem $y = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{cotg} x$.

$$\text{Fce sekans: } y = \frac{1}{\cos x}$$

$$\text{Fce kosekans: } y = \frac{1}{\sin x}$$

Vlastnosti goniometrických fcí:

- Fce sin, tg, cotg jsou liché. Fce cos je sudá
- $\mathbb{D}(\sin x), \mathbb{D}(\cos x) = \mathbb{R}, \quad \mathbb{H}(\sin x), \mathbb{H}(\cos x) = \langle -1; 1 \rangle$
 $\mathbb{D}(\operatorname{tg} x) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right), \quad \mathbb{D}(\operatorname{cotg} x) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k\pi; (k+1)\pi) \quad \mathbb{H}(\operatorname{tg} x), \mathbb{H}(\operatorname{cotg} x) = \mathbb{R}$
- Fce sin, cos jsou periodické s periodou 2π a fce tg, cotg jsou periodické s periodou π .

3.1.3 Cyklometrické fce

arcsin inverzní k fci sin

arccos inverzní k fci cos

arctg inverzní k fci tg

arccotg inverzní k fci cotg

Součtové vzorce $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$\text{I. } \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\text{II. } \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\text{III. } \operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

Součty goniometrických fcí

$$\text{I. } \sin x \pm \sin y = 2 \sin\left(\frac{x \pm y}{2}\right) \cos\left(\frac{x \mp y}{2}\right)$$

$$\text{II. } \cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\text{III. } \cos x - \cos y = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Vztahy pro dvojnásobný argument

$$\text{I. } \sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

$$\text{II. } \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\text{III. } \operatorname{tg}(2x) = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

Vztahy pro poloviční argument

$$\text{I. } \left| \sin \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$\text{II. } \left| \cos \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

$$\text{III. } \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

- I. $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{(2k+1)\frac{\pi}{2}\}$
 II. $\sin(x + 2k\pi) = \sin x \quad \forall x \in (0; 2\pi) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$
 III. $\cos(x + 2k\pi) = \cos x \quad \forall x \in (0; 2\pi) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$
 IV. $\sin(-x) = -\sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 V. $\cos(-x) = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 VI. $\sin(\pi - x) = \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 VII. $\cos(\pi - x) = -\cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 VIII. $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 IX. $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 X. $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x \quad \forall x \in \mathbb{D}(\operatorname{tg})$
 XI. $\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x \quad \forall x \in \mathbb{D}(\operatorname{tg})$
 XII. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3.1.4 Trigonometrie

Sinova věta: v každém \triangle platí

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Užití: V daném \triangle je možno sinovu větu použít známe-li 2 úhly a 1 stranu, nebo 2 strany a úhel proti jedné z nich.

vztah pro poloměr kružnice opsané: $2r = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$

Kosinova věta: $\forall \triangle ABC$;

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad (+ \text{cyklická záměna})$$

Užití: Pokud známe dvě strany a úhel, jimi svíraný, nebo 3 strany.

Věty o obsahu \triangle :

1. $\forall \triangle ABC$; $S = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot \sin \gamma \quad + CZ$

2. **Heronův vzorec:** $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad s = \frac{a+b+c}{2}$

3. $S = s \cdot \rho \quad \rho$ poloměr kružnice vepsané

4. $S = \frac{abc}{4r} \quad r$ poloměr kružnice opsané

Mollweidovy vzorce:

$$1. \frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} \quad 2. \frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}}$$

$$\operatorname{cotg} \gamma = \frac{b}{c \cdot \sin \alpha} - \operatorname{cotg} \alpha$$

Tangentova věta:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}} \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2} = \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2} + CZ$$

Kapitola 4

Stereometrie

4.1 Základní vztahy

1. **Tranzitivní vlastnost** : Je-li bod prvkem přímky a přímka je incidentní s rovinou, pak i bod náleží rovině.
2. Bod leží v rovině, jestliže leží na některé přímce této roviny.
3. Přímka leží v rovině, jestliže dva její různé body leží v rovině.
4. Každými dvěma různými body je určena právě jedna přímka.
5. Každá rovina je určena
 - (a) 3 body neležícími v přímce
 - (b) přímkou a bodem nenáležícím v té přímce
 - (c) dvěma různoběžnými přímkami
 - (d) dvěma různými rovnoběžkami
6. Daným bodem lze vést k dané přímce pouze jednu rovnoběžku.
7. Jestliže máme vést přímku rovnoběžnou s danou rovinou, musí daná rovina obsahovat přímku rovnoběžnou s danou přímkou (a musí být alespoň 1).
8. Je-li přímka rovnoběžná s dvěma různoběžnými rovinami, je rovnoběžná i s jejich průsečnicí.
9. Daným bodem lze vést k dané rovině jedinou rovinu s ní rovnoběžnou.

Konstrukce řezu

- V1** - Leží-li dva různé body v rovině, pak přímka jimi určená také leží v této rovině. Pokud je jednou rovinou rovina řezu a druhou stěna tělesa → průsečnice je hranou řezu.
- V2** - Dvě rovnoběžné roviny protíná třetí rovina ve dvou rovnoběžných přímkách.
- V3** - Jsou-li každé dvě ze tří rovin různoběžné a mají-li tyto tři roviny jediný společný bod, procházejí tímto bodem všechny tři průsečnice.

Odchylka přímek

1. *různoběžných* → velikost každého z ostrých nebo pravých úhlů, které přímky spolu svírají
2. *rovnoběžných* → je rovna 0°
3. *mimoběžných* → odchylka různoběžných přímek vedených libovolným bodem prostoru rovnoběžně s danými mimoběžkami.

Kolmost přímek a rovin

- Dvě přímky jsou k sobě kolmé právě tehdy, když jejich odchylka je 90°
- Přímka a rovina jsou k sobě kolmé právě tehdy, když je přímka kolmá ke všem přímkám roviny.
- Je-li přímka kolmá ke dvěma různoběžkám roviny, pak je k rovině kolmá = **kritérium kolmosti přímky a roviny**
- Dvě roviny jsou k sobě kolmé právě tehdy, když jedna z nich obsahuje přímku kolmou k té druhé rovině.

Odchylka přímek a rovin

- Odchylka dvou rovin je odchylka jejich průsečnic s rovinou, která je k oběma rovinám kolmá
- Odchylka přímky a roviny je velikost nejmenší z odchylek přímky a libovolné přímky té roviny.
- Není-li přímka kolmá k rovině, je odchylka přímky a roviny rovna odchylce přímky a jejího pravoúhlého průmětu do té roviny.

Vzdálenost bodu od přímky a od roviny

- vzdálenost bodů A , B je délka úsečky AB .
- vzdálenost bodu od přímky můžeme určit jako vzdálenost bodu od přímky v rovině, neboť bod a přímka v prostoru určují rovinu.
- vzdálenost bodu A od roviny ρ je vzdálenost bodu A a jeho pravoúhlého průmětu A' do roviny ρ .

Kritérium rovnoběžnosti

- Přímka p je rovnoběžná s rovinou ρ , jestliže lze na přímce p najít dva různé body ležící v témže poloprostoru ohraničeném rovinou ρ , které mají od roviny ρ stejnou vzdálenost.
- Dvě roviny ρ , σ jsou rovnoběžné, jestliže lze v rovině σ najít 3 různé body, které neleží v téže přímce, ale leží v témže poloprostoru s hraniční rovinou ρ , a které mají od roviny ρ stejnou vzdálenost.

Vzdálenost přímek a rovin

- vzdálenost dvou rovnoběžných přímek je vzdálenost libovolného bodu jedné přímky od druhé. vzdálenost rovnoběžných přímek můžeme určit jako jejich vzdálenost v rovině jimi určené nebo pomocí roviny kolmé k oběma přímkám.
- vzdálenost dvou rovnoběžných rovin je vzdálenost libovolného bodu jedné roviny od druhé.
- vzdálenost přímky od roviny s ní rovnoběžné je vzdálenost libovolného bodu přímky od této roviny.
- vzdálenost dvou mimoběžných přímek p , q je délka úsečky PQ , kde body P , Q jsou po řadě průsečíky mimoběžek p , q s osou mimoběžek.

Kapitola 5

Kombinatorika

5.1 Základní vztahy

Kombinatorické pravidlo součinu: Počet všech uspořádaných k -tic, jejichž první člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý n_2 způsoby (po výběru prvního), ... až k -tý člen n_k způsoby, je roven součinu $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$.

Kombinatorické pravidlo součtu: Jsou-li $A_1; A_2; \dots A_n$ konečné množiny, které mají po řadě $p_1; p_2; \dots p_n$ prvků a jsou-li každé dvě disjunktní, pak počet prvků množiny sjednocené $(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots \cup A_n)$ je roven $p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n$.

5.1.1 Variace

Def.: k -členná variace z n prvků je **uspořádaná** k -tice z těchto prvků tak, že se každý v ní vyskytuje **nejvýše jednou**.

Věta: Počet $V(k, n)$ všech k -členných variací z n prvků je

$$V(k, n) = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

5.1.2 Permutace

- zvláštní případ variací

Def.: Permutace z n prvků je každá n -členná variace z těchto prvků neboli uspořádaná n -tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje **právě jednou**.

$$P(n) = n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1 = n!$$

$0! = 1$ definováno!!

5.1.3 Kombinace

Def.: k -členná kombinace z n prvků je **neuspořádaná** k -tice sestavená z těchto prvků tak, že se každý vyskytuje nejvýše jednou.

$$K(k, n) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Vlastnosti kombinačních čísel:

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \forall n, k \in \mathbb{N}; k \leq n$
2. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

5.1.7 Kombinace s opakováním

Def.: k -člená kombinace s opakováním z n prvků je **neuspořádaná** k -tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše k -krát.

$$K'(k, n) = \binom{n+k-1}{k} = K(k, n+k-1)$$

Kapitola 6

Pravděpodobnost

6.1 Základní vztahy

Pokus(náhodný) ω ... výsledek pokusu

Ω ... množina všech možných výsledků pokusu (př. 3 mince ... $\Omega = 2^3$)

jev ... množina výsledků pokusu \rightarrow podmnožina Ω

jev jistý ... musí vždy takto nastat

jev nemožný ... nemůže nikdy nastat

- $\omega \in A$; výsledek ω je **příznivý** jevu A
- $A \subset B$; jev A je **podjevem** jevu B
- Jev $A \cup B$, který nastává právě tehdy, nastane-li aspoň jeden z jevů A a B, nazýváme **sjednocením** jevů A a B.
- Jev $A \cap B$, který nastává právě tehdy, nastanou-li oba jevy A a B, nazýváme **průnikem** jevů A a B.
- Je-li $A \cap B = \emptyset$, říkáme, že jevy A a B se **navzájem vylučují**.
- Jev A' nastává právě tehdy, když jev A nenastává, nazýváme jevem **opačným** k jevu A.

6.1.1 Pravděpodobnost

ČETNOST ... kolikrát dostaneme jeden daný výsledek pokusu ... $n(\omega)$

RELATIVNÍ ČETNOST ... četnost vztažená na počet pokusů ... $\frac{n(\omega)}{n}$

Má-li náhodný pokus m možných výsledků a jsou-li tyto výsledky stejně možné (pravděpodobné), pak o každém z nich říkáme, že má pravděpodobnost $\frac{1}{m}$

6.1.2 Pravděpodobnost jevů

Pravděpodobnost jevu A, označme ji $P(A)$, se definuje jako součet pravděpodobností výsledků příznivých jevu A

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega).$$

V pokusu, jehož všechny možné výsledky jsou stejně pravděpodobné, je pravděpodobnost jevu rovna

$$P(A) = \frac{m(A)}{m},$$

kde $m(A)$ je počet příznivých výsledků a m je počet všech výsledků.

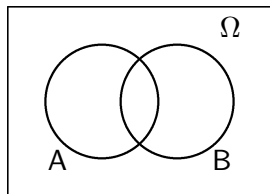
$0 \leq P(A) \leq 1$, $P(\emptyset) = 0$... jev nemožný, $P(\Omega) = 1$... jev jistý

6.1.3 Sčítání pravděpodobností

1. Jsou-li jevy A a B disjunktní (navzájem se vylučují) platí $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

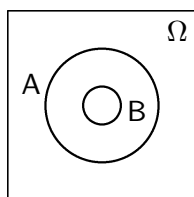
2. Jevy nejsou disjunktní



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

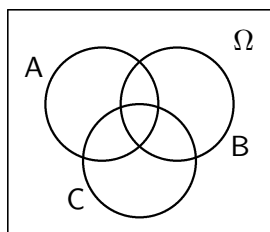
Jestliže $B = A' \Rightarrow P(A) = 1 - P(A')$

Je-li $B \subset A$



$$P(A \cap B') = P(A) - P(B)$$

$$P(B) \leq P(A)$$



$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

6.1.4 Nezávislé jevy

Řekneme, že jevy A a B jsou nezávislé, platí-li

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Jevy A, B a C jsou nezávislé, platí-li

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \wedge$$

$$\wedge P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \wedge P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C) \wedge P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$$

Jsou-li jevy A a B nezávislé $\Rightarrow A'$ a B; A a B'; A' a B' jsou nezávislé.

6.1.5 Nezávislé pokusy

Def.: Řekneme, že dílčí pokusy jsou nezávislé, jestliže pro všechny možné výsledky (ω_1, ω_2) platí,

$$p(\omega_1, \omega_2) = p(\omega_1) \cdot p(\omega_2)$$

6.1.6 Binomické rozdělení (Bernoulliovo schéma)

Mějme n nezávislých pokusů, z nichž každý končí buď zdarem s pravděpodobností p , nebo nezdarem s pravděpodobností q . Potom pravděpodobnost jevu A_k , že právě k pokusů bude zdařilých, je

$$P(A_k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k},$$

kde $k = 0, 1, 2, \dots, n$ $p + q = 1$

Ověřování hypotéz

učebnice str. 199-121

6.1.7 Podmíněné pravděpodobnosti

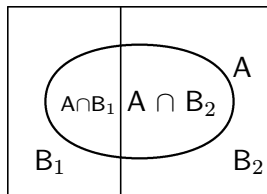
Pravděpodobnost je podmíněna jevem B (neboli za podmínky B platí ...), značí se $p(\omega|B)$ a platí $p(\omega|B) = \frac{p(\omega)}{P(B)}$.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) \quad + CZ$$

vzorec pro násobení pravděpodobností

Jde-li o pokus se stejně pravděpodobnými výsledky, platí

$$P(A|B) = \frac{m(A \cap B)}{m(B)}$$



$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2)$$

↓

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2)$$

vzorec pro celkovou pravděpodobnost

Kapitola 7

Statistika

7.1 Základní vztahy

7.1.1 Termíny

Statistický soubor - události, věci, lidé, časy, ...

Statistická jednotka - prvek souboru

Statistický znak - hodnota té jednotky. Může být *kvalitativní* nebo *kvantitativní*

statistické jednotky - 1, 2, ... $n \rightarrow$ hodnoty stat. znaku: x_1, x_2, \dots, x_n slučujeme do r tříd:

$x_1^*, x_2^*, \dots, x_r^*$

Četnost hodnoty $x_j^* \dots n_j$

Relativní četnost ... $\nu_j = \frac{n_j}{n}$

$$\sum_{j=1}^n n_j = n \quad \sum_{j=1}^r \nu_j = 1$$

Statistický soubor můžeme popsat pomocí diagramu:

1. spojitého
2. sloupcového (histogram)
3. kruhového
- ⋮

7.1.2 Charakteristika polohy a variability

Aritmetický průměr $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$

Vážený průměr $\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^n x_j^* \cdot n_j}{n}$

Pokud 2 hodnoty x, n spolu souvisí vztahem $x = an + b$, pak stejný vztah platí i pro aritmetické průměry: $\bar{x} = a\bar{n} + b$

Průměrný přírůstek $\bar{y} = \frac{x_n - x_0}{n}$

Průměrné tempo přírůstku $\bar{z} = \sqrt[n]{\frac{x_n}{x_0}}$

Geometrický průměr $\bar{z} = \sqrt[n]{z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} = \bar{x}_G$

$$\text{Kvadratický průměr } \bar{x}_K = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}}$$

$$\text{Harmonický průměr } \bar{x}_H = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$$

Cauchyho věta: $\forall x_i \neq x_k (i, k = 1, \dots, n)$;

$$m_{\max} > x_K > x_A > x_G > x_H > x_{\min}$$

Pokud nastane možnost $x_i = x_k$, pak dostaneme $x_A \leq x_G$

Modus stat. souboru ... $\text{Mod}(x)$ - hodnota znaku, který se vyskytuje s největší četností

Medián ... $\text{Med}(x)$ - prostřední hodnota znaku, seřadíme-li je podle velikosti

$$\text{pro } n \text{ liché} \rightarrow \text{Med}(x) = x_{\frac{n+1}{2}}$$

$$\text{pro } n \text{ sudé} \rightarrow \text{Med}(x) = \frac{1}{2} (x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1})$$

$$\text{Rozptyl } s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

$$s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j^* - \bar{x})^2 n_j$$

Směrodatná odchylka s

$$\text{Variační koeficient } v_x = \frac{s_x}{\bar{x}} \cdot 100\%$$

$$\text{Mezikvartilová odchylka } Q(x) = \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)$$

Kapitola 8

Posloupnosti a řady

8.1 Základní vztahy

posloupnost

- Posloupnost je reálná funkce jejímž definičním oborem je podmnožina množiny přirozených čísel, píšeme např.

$$(a_n)_{n=1}^{\infty},$$

kde a_n je n -tý člen posloupnosti a vyjadřuje "posloupnostní hodnotu" n -tého prvku.

Zápis posloupnosti:

1. pomocí n -tého členu
2. výpisem prvků
3. rekurentní zápis - zápis pomocí předchozího prvku

$$54; -18; 6; -2; \frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \dots$$

$$a_{n+1} = a_n \cdot \left(-\frac{1}{3}\right), \quad a_1 = 54$$

$$a_{n+1} = 54 \left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \underline{a_n = 54 \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}}$$

8.1.1 Vlastnosti posloupností

Def.: Posloupnost je rostoucí: $\forall r, s \in \mathbb{N}; r < s \Rightarrow a_r < a_s$

klesající: $\forall r, s \in \mathbb{N}; r < s \Rightarrow a_r > a_s$

nerostoucí: $\forall r, s \in \mathbb{N}; r < s \Rightarrow a_r \geq a_s$

neklesající: $\forall r, s \in \mathbb{N}; r < s \Rightarrow a_r \leq a_s$

Pokud jedna z těchto dvou podmínek platí \Rightarrow posloupnost monotónní

Věta: Daná posloupnost je rostoucí, jestliže platí: $\forall n \in \mathbb{N}; a_{n+1} > a_n$

klesající, jestliže platí: $\forall n \in \mathbb{N}; a_{n+1} < a_n$

Posloupnost omezená zdola: $\forall n \in \mathbb{N}; \exists d \in \mathbb{R}; a_n \geq d$

shora: $\forall n \in \mathbb{N}; \exists d \in \mathbb{R}; a_n \leq d$

Posloupnost je omezená právě, když je omezená shora i zdola

alternující posloupnost: střídá se + a -

8.1.2 Matematická indukce

Důkaz matematickou indukcí spočívá ve dvou krocích

1. Dané tvrzení platí pro 1 (případně pro nejmenší možné přirozené číslo)
2. Za předpokladu, že vztah platí pro nějaké číslo n , pak tento vztah platí i pro $n + 1$.

8.1.3 Aritmetická posloupnost

Def.: Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **aritmetická**, právě když existuje takové reálné číslo d , že pro každé přirozené číslo n platí

$$a_{n+1} = a_n + d$$

Číslo d se nazývá **diference** aritmetické posloupnosti

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \quad (a_1 + (n - 1)d)_{n=1}^{\infty}$$

Věta: V aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s diferencí d platí pro všechna $r, s \in \mathbb{N}$

$$a_s = a_r + (s - r)d$$

Věta: Pro součet s_n prvních n členů aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tj. $a_1 + a_2 + \dots + a_n$, platí

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

8.1.4 Geometrická posloupnost

Def.: Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **geometrická**, právě když existuje takové reálné číslo q , že pro každé přirozené číslo n je

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

Číslo q se nazývá **kvocient** geometrické posloupnosti.

Pokud $a_n, a_1, q \neq 0 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$

Věta: V geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem q platí $\forall n \in \mathbb{N}$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Věta: V geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem q platí $\forall r, s \in \mathbb{N}$

$$a_s = a_r \cdot q^{s-r}$$

Věta: Pro součet s_n prvních n členů geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem q platí

1. pro $q = 1$

$$s_n = n \cdot a_1$$

2. pro $q \neq 1$

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

8.1.5 Finanční matematika

jistina ... vložená částka

roční úroková míra ... navýšení v % za 1 rok

úrokovací období ... čas, za který se připsí úroky

Jednoduché úrokování - jistina je stejná

Složené úrokování - k jistině se přičtou úroky a tím se vytvoří jistina nová

$$J_n = J_0 \left(1 + 0,85 \cdot \frac{p}{100} \right)^n,$$

kde J_0 je počáteční vklad a p je úrok v procentech

Termíny:

- p. a. ... úroková míra za rok
- p. s. ... úroková míra za 1/2 roku
- p. q. ... úroková míra za 1/4 rok
- p. m. ... úroková míra za měsíc
- p. k. ... úroková míra za týden
- p. d. ... úroková míra za den

$$J_n = J_0 \left(1 + \frac{p}{100} \cdot 0,85 \right)^n = J_0 \cdot q^n$$

1. stav konta na začátku úrokovacího období

$$J = J_1 + J_2 + \dots + J_n = J_0 \cdot q + J_0 \cdot q^2 + \dots + J_0 \cdot q^n$$

$$J = J_0 \cdot q \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

2. stav konta na konci úrokovacího období

$$J = J_0 + J_1 + \dots + J_n = J_0 + J_0 \cdot q + J_0 \cdot q^2 + \dots + J_0 \cdot q^n$$

$$J = J_0 \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

8.1.6 Vlastnosti aritmetických a geometrických posloupností

Věta: Je-li $d > 0 \Rightarrow$ aritmetická posloupnost je **rostoucí**

Je-li $d < 0 \Rightarrow$ aritmetická posloupnost je **klesající**

Je-li $d = 0 \Rightarrow$ aritmetická posloupnost je **konstantní**

- Geometrická posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s koeficientem q je

1. rostoucí, právě když

$$a_1 > 0, q > 1 \quad \text{nebo} \quad a_1 < 0, q < 1;$$

2. klesající, právě když

$$a_1 > 0, q < 1 \quad \text{nebo} \quad a_1 < 0, q > 1.$$

- Geometrická posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s koeficientem q

1. je omezená, právě když

$$|q| \leq 1 \quad \text{nebo} \quad a_1 = 0;$$

2. je zdola omezená, ale není shora omezená, právě když

$$a_1 > 0, q > 1;$$

3. je shora omezená, ale není zdola omezená, právě když

$$a_1 < 0, q > 1;$$

4. není zdola omezená, ani shora omezená, právě když

$$a_1 \neq 0, q < -1;$$

8.1.7 Limita poloupnosti

Def.: Číslo a se nazývá *limita posloupnosti* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, právě když $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \in \mathbb{N}; n \geq n_0; |a_n - a| < \varepsilon \rightarrow a_n \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$

Posloupnost se nazývá **konvergentní** jestliže má limitu.

Posloupnost, která není konvergentní, se nazývá **divergentní**

Zápis limity: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

Věta: Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu

Věta: Každá konvergentní posloupnost je omezená

$$a_n \geq \min(a - \varepsilon; m) \quad a_n \leq \max(a + \varepsilon; M)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a + b$$

Věta: Jestliže posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}; (b_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou konvergentní a při tom $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, pak je konvergentní i posloupnost $(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$ a platí

$$(a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a + b$$

Věta: Mějme posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}; (b_n)_{n=1}^{\infty}$, které jsou konvergentní a necht' $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, pak jsou konvergentní i posloupnosti $(a_n - b_n)_{n=1}^{\infty}, (a_n \cdot b_n)_{n=1}^{\infty}, (c \cdot a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde c je libovolné reálné číslo, $(\frac{a_n}{b_n})_{n=1}^{\infty}$, kde $b, b_n \neq 0$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$ a platí

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \cdot b$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a - b$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \cdot a$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b}$

Věta: Geometrická posloupnost $(q^n)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní právě když platí

$$|q| < 1.$$

Věta: Pro každé reálné číslo r existuje neklesající posloupnost racionálních čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a nerostoucí posloupnost racionálních čísel $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ tak, že platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = r.$$

8.1.8 Nevlastní limita

Def.: Řekneme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má nevlastní limitu $+\infty$, právě když pro každé číslo $K \in \mathbb{R}$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n \in \mathbb{N} n \geq 0; a_n > K$.

Def.: Řekneme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má nevlastní limitu $-\infty$, právě když pro každé číslo $L \in \mathbb{R}$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n \in \mathbb{N} n \geq 0; a_n < L$.

8.1.9 Nekonečná řada

Věta: Je-li $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ geometrická posloupnost a $|q| < 1$, pak posloupnost $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ ($s_n = \sum_{i=1}^n a_i$) je konvergentní a její limita je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

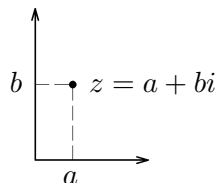
Kapitola 9

Komplexní čísla

9.1 Základní vztahy

Imaginární jednotka ... $i^2 = -1$

9.1.1 Algebraický tvar komplexního čísla: $z = a + bi$



$$\left. \begin{array}{l} z_1 = a + bi \\ z_2 = c + di \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i \\ z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + cb)i \\ \frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot i, \quad z_2 \neq 0 \end{array}$$

Platí: $\forall z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}; \forall m, n \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ll} z^m \cdot z^n = z^{m+n} & i^{4k+1} = i \\ z_1^n \cdot z_2^n = (z_1 \cdot z_2)^n & i^{4k+2} = -1 \\ (z^m)^n = z^{m \cdot n} & i^{4k-1} = -i \\ z^{-n} = (z')^n, \quad z \neq 0 & i^{4k} = 1 \end{array}$$

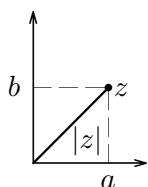
Komplexně sdružené číslo - \bar{z}

$$z = a + bi \rightarrow \bar{z} = a - bi$$

Platí: $\forall z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$\overline{-z} = -\bar{z}, \quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \quad \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}, \quad z_2 \neq 0, \quad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$$

$|z|$... absolutní hodnota komplexního čísla - vzdálenost od počátku = **modul**



$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}} \Rightarrow |z| \in \mathbb{R}_0^+$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

z' - převrácené číslo k číslu $z \Rightarrow z' \cdot z = 1$

$$z' = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

9.1.2 Goniometrický tvar komplexního čísla: $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

Základní operace:

$$z_1 = |z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \quad z_2 = |z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

1. **Sčítání/odčítání** - převedeme na algebraický tvar, sečteme/odečteme, převedeme zpět

2. **Násobení**

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

3. **Dělení**

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}(\cos \varphi - i \sin \varphi), \quad z \neq 0$$

4. **Mocniny**

$$z^2 = |z|^2(\cos(2\varphi) + i \sin(2\varphi))$$

$$z^3 = |z|^3(\cos(3\varphi) + i \sin(3\varphi))$$

⋮

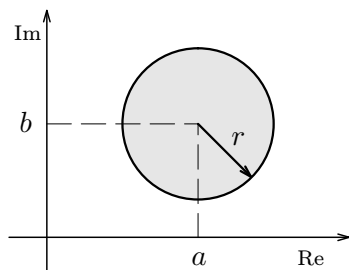
$$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) = |z|^n(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n \quad \Rightarrow \quad \text{Moivreova věta}$$

9.1.3 Řešení nerovnic

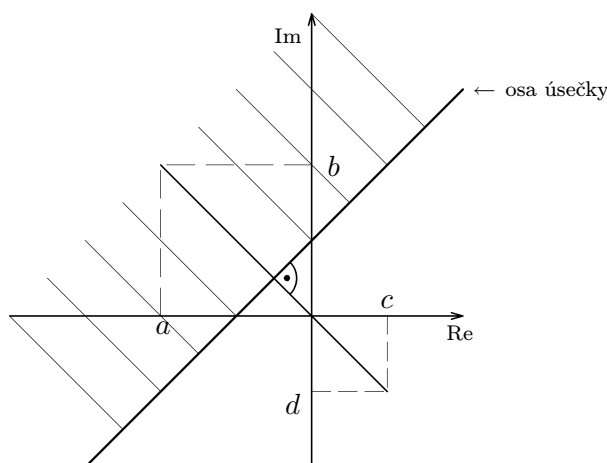
Absolutní hodnota rozdílu komplexních čísel určuje jejich vzdálenost v Gaussově rovině.

$$|z - (a + bi)| \leq r$$

$$a, b, r \in \mathbb{R}$$



$$|z - (a + bi)| \leq |z - (c + di)|$$



9.1.4 Binomická rovnice

$$x^n - a = 0 \quad x \in \mathbb{C}, \quad a \in \mathbb{C}_0, \quad n \in \mathbb{N}_2 \quad a = |a|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

$$x_k = \sqrt[n]{|a|} \left(\cos \frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right) \quad k \in \mathbb{Z}$$

Různá řešení pouze pro $k = 0; 1; 2; \dots; n - 1 \rightarrow$ získáme n řešení, jejichž obrazy leží na kružnici se středem v počátku a poloměrem $\sqrt[n]{|a|}$ a tvoří vrcholy pravidelného n -úhelníka.

9.1.5 Kvadratické rce s reálnými koeficienty

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a},$$

pro $D < 0$.

Věta: Pro algebraickou rci s **reálnými koeficienty** $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ ($a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$) platí: Je-li $x_1 = a + bi$ ($b \neq 0$) kořen této rce, pak také $x_2 = a - bi$ je jejím kořenem.

9.1.6 Kvadratické rce s komplexními koeficienty

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad x, a, b, c \in \mathbb{C}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{|D|}(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2})}{2a},$$

kde $D = |D|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$. V některých případech je lepší představit si \sqrt{D} jako komplexní číslo $u + vi$ a D nepřevádět na goniometrický tvar. Pak dostaneme vztah např. $\sqrt{8 + 6i} = u + vi$ a po postupné úpravě můžeme dosadit do výše zmíněného vztahu jako

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm (u + vi)}{2a}.$$

9.1.7 Reciproké rovnice

Def.: Rce $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ se nazývá **reciproká**, právě když $\forall i = 0, 1, \dots, n$ platí
 $a_i = a_{n-i}$, tzv. **kladně reciproká**
 nebo
 $a_i = -a_{n-i}$, tzv. **záporně reciproká**.

Věta: Rce $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ je reciproká, právě když platí:

$$c \text{ je kořen této rce} \Leftrightarrow \frac{1}{c} \text{ je kořen této rce.}$$

Věta:

1. Každá **záporně** reciproká rce má kořen **+1**.
2. Každá **záporně** reciproká rce **sudého** a **kladně** reciproká rce **lichého** stupně má kořen **-1**.

Každá reciproká rce se dá převést na kladně reciprokou rci sudého stupně, která se dále řeší:

$$\begin{aligned} a_0 x^{2k} + a_1 x^{2k-1} + \dots + a_k x^k + \dots + a_1 x + a_0 &= 0 \quad | : x^k \\ a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k + \dots + a_1 \frac{1}{x^{k-1}} + a_0 \frac{1}{x^k} &= 0 \\ a_0 \left(x^k + \frac{1}{x^k} \right) + \dots + a_{k-1} \left(x + \frac{1}{x} \right) + a_k &= 0 \end{aligned}$$

Použitím **Lagrangeovy substituce:**

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} &= y \\ x^2 + \frac{1}{x^2} &= y^2 - 2 \\ x^3 + \frac{1}{x^3} &= y^3 - 3y \\ &\vdots \end{aligned}$$

převědeme danou rci na rci k -tého stupně, kterou dále řešíme.

9.1.8 Exponenciální tvar komplexního čísla: $z = |z|e^{i\varphi}$

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi} \quad \Rightarrow \quad \underline{\text{Eulerův vztah}}$$

Kapitola 10

Analytická geometrie

10.1 Základní vztahy

10.1.1 Souřadnice

Kartézská soustava souřadnic → přímka - $0x$; rovina - $0xy$; prostor - $0xyz$

x, y, z - souřadné osy

0 - počátek soustavy souřadnic

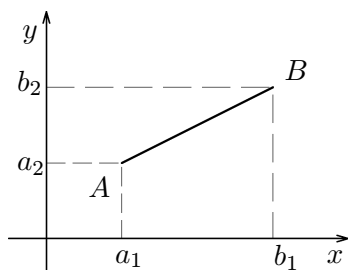
$A[a_1, a_2, a_3]$

Transformační rce posunutí:

$$\begin{cases} x' = x - m \\ y' = y - n \end{cases}$$

Vzdálenost bodů

1. v rovině:



$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

2. v prostoru:

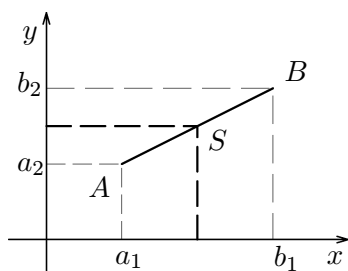
$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Střed úsečky:

1. na přímce:

$$S \left[\frac{a + b}{2} \right]$$

2. v rovině



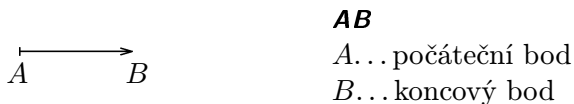
$$S \left[\frac{a_1 + b_1}{2}; \frac{a_2 + b_2}{2} \right]$$

3. v prostoru

$$S \left[\frac{a_1 + b_1}{2}; \frac{a_2 + b_2}{2}; \frac{a_3 + b_3}{2} \right]$$

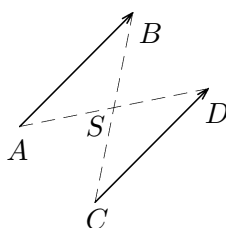
10.1.2 Vektory

- orientované úsečky dané velikostí a směrem



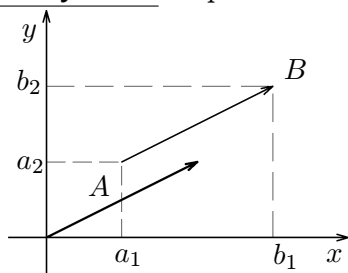
nulový vektor $|AB| = 0$

Orientované úsečky AB a CD určují týž vektor právě tehdy, když AD a BC mají společný střed.



Jestliže jsou dva vektory rovnoběžné, pak jsou kolineární (suhlasně/nesuhlasně)

Polohový vektor → počáteční bod v počátku soustavy souřadnic



$$\mathbf{u} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (u_1, u_2)$$

$$\Downarrow$$

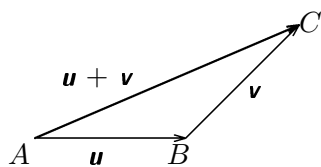
$$\mathbf{u} = B - A$$

$$u_1 = b_1 - a_1 \quad u_2 = b_2 - a_2$$

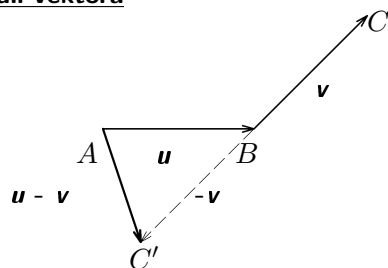
Sčítání vektorů

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = C - A$$

$$\mathbf{u}(u_1; u_2; u_3) \quad \mathbf{v}(v_1; v_2; v_3) \quad \rightarrow \quad \mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1; u_2 + v_2; u_3 + v_3)$$



Rozdíl vektorů



$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = (u_1 - v_1; u_2 - v_2; u_3 - v_3)$$

Lineární kombinace vektorů

Věta: Vektor $au + bv + cw$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$; se nazývá lineární kombinací vektorů $u; v; w$.

Skalární součin vektorů

velikost vektoru:

$$\mathbf{d}(d_1; d_2; d_3) \rightarrow |\mathbf{d}| = \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}$$

$$\mathbf{AB}(b_1 - a_1; b_2 - a_2; b_3 - a_3) \rightarrow |\mathbf{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

jednotkový vektor $\rightarrow |\mathbf{d}| = 1$ Skalární součin vektorů $\mathbf{u}(u_1; u_2; u_3)$ a $\mathbf{v}(v_1; v_2; v_3)$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

↓

je to *skalár* (číslo)

$$u^2 = |\mathbf{u}|^2$$

 $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w};$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$$

$$(c \cdot \mathbf{u})\mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$$

$$\mathbf{w}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{w}\mathbf{u} + \mathbf{w}\mathbf{v}$$

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}; (\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{c} + \mathbf{d}) = \mathbf{ac} + \mathbf{ad} + \mathbf{bc} + \mathbf{bd}$$

$$(\mathbf{a} \pm \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 \pm 2\mathbf{ab}$$

Odchylka dvou vektorů

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|}, \text{ pro } |\mathbf{u}|, |\mathbf{v}| \neq 0$$

$$\text{cosinova věta } |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \varphi$$

Vektorový součin

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{w}$$

$$\mathbf{u}(u_1; u_2; u_3) \quad \mathbf{v}(v_1; v_2; v_3)$$

$$\mathbf{w} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}; - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$-(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \times \mathbf{u}$$

Pro $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{w}$ platí:

1. $\mathbf{w} \perp \mathbf{u}, \mathbf{v}$

2. $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ tvoří pravotočivou bázi

3. $|\mathbf{w}| = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \sin \alpha$

Číselná hodnota $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ odpovídá číselné hodnotě plochy rovnoběžníka.Objem rovnoběžnostěnu určíme jako součin $V = |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$, kde a, b, c jsou velikosti stran. Tento součin nazýváme smíšený.

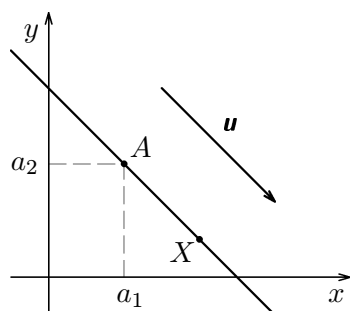
Platí cyklická záměna: $V = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$

$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$

$\mathbf{a} \times (m\mathbf{b}) = (m\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = m(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$

10.1.3 Geometrie v rovině

Parametrické vyjádření přímky



$$X = A + t \cdot \mathbf{u} \Rightarrow \begin{aligned} x &= a_1 + t \cdot u_1 \\ y &= a_2 + t \cdot u_2 \end{aligned} \quad t \in \mathbb{R}$$

Těžiště \triangle : $T = \frac{1}{3}(A + B + C)$

$$t_x = \frac{1}{3}(a_x + b_x + c_x)$$

$$t_y = \frac{1}{3}(a_y + b_y + c_y)$$

$$p \parallel q \Leftrightarrow \mathbf{u} = k \cdot \mathbf{v}$$

$$p = q \Leftrightarrow \mathbf{u} = k \cdot \mathbf{v} \wedge p \cap q \neq \emptyset$$

Obecná rce přímky

- pouze v rovině

$$ax + by + c = 0,$$

kde alespoň jedno z čísel $a, b \neq 0$ se nazývá obecná rce přímky.

Platí: $\mathbf{n}(a; b) \rightarrow$ normálový vektor $\mathbf{n} \perp \mathbf{u} \ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0)$

Směrníkový tvar přímky

$$y = kx + q$$

$$k = -\frac{a}{b} \dots \text{směrnice}$$

$$q = -\frac{c}{b} \dots \text{úsek na ose } y$$

$$\text{tg } \varphi = k$$

$$\text{přímka kolmá} \rightarrow y = -\frac{1}{k}x + d$$

Úsekový tvar přímky

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

$$p = -\frac{c}{a} \dots \text{průsečík s osou } x$$

$$q = -\frac{c}{b} \dots \text{průsečík s osou } y$$

Vzdálenost bodu od přímky

$$d(P; p) = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Odchylka přímek

Osa úhlu

Směrnice osy úhlu je vektor \mathbf{w} , kde platí

$$\mathbf{w} = \mathbf{u}^* + \mathbf{v}^*$$

normovaný vektor - $\mathbf{p}^* = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \quad |\mathbf{p}^*| = 1$

$$p(P; \mathbf{u}) \quad q(Q; \mathbf{v}) \quad \varphi \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$$

$$\downarrow$$

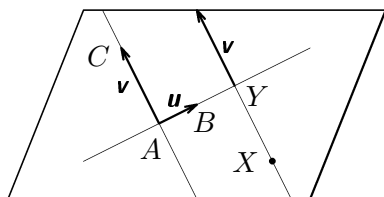
$$\cos \varphi = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|}$$

10.1.4 Geometrie v prostoru

Parametrické vyjádření přímky

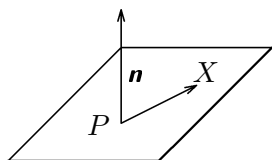
$$X = A + t \cdot \mathbf{u} \Rightarrow \begin{aligned} x &= a_1 + t \cdot u_1 & t \in \mathbb{R} \\ y &= a_2 + t \cdot u_2 \\ z &= a_3 + t \cdot u_3 \end{aligned}$$

Parametrické vyjádření roviny



$$\begin{aligned} X &= Y + s \cdot \mathbf{v} & Y &= A + t \cdot \mathbf{u} \\ &\searrow \quad \swarrow & & \\ X &= A + t \cdot \mathbf{u} + s \cdot \mathbf{v} \\ X &= A + t(B-A) + s(C-A) \end{aligned}$$

Obecná rovnice roviny



$\mathbf{n} \cdot \mathbf{XP} = 0$ a $\mathbf{n}(a; b; c)$ - normálový vektor roviny
 $X[x; y; z]$ $P[p_1; p_2; p_3]$

$$\underline{ax + by + cz + d = 0}$$

$$d = -(ap_1 + bp_2 + cp_3)$$

Polohové úlohy v prostoru

1. *Přímka a rovina:*

- rovnoběžná $\rightarrow \mathbf{n}_\rho \cdot \mathbf{u}_p = 0$ - $\rho \cap p = \emptyset$
 - $p \subset \rho$
- různoběžná $\rightarrow \mathbf{n}_\rho \cdot \mathbf{u}_p \neq 0$ - $p \cup \rho = \{A\}$

2. *2 roviny:*

- rovnoběžné - různé \searrow normálové vektory $\rightarrow \rho \cap \sigma = \emptyset$
 - splývající \nearrow lineárně závislé $\rightarrow \rho = \sigma$
- různoběžné - lineárně nezávislé $\rho \cap \sigma = p \rightarrow$ průsečnice
 $\mathbf{n}_\rho \times \mathbf{n}_\sigma = \mathbf{u}_p$

3. *2 přímky:*

- rovnoběžné (různé, totožné)
- různoběžné
- mimoběžné

Přímka mimoběžek

1. *rovnoběžná s daným směrem* \Rightarrow 1. přímka + směr \rightarrow rovina \rightarrow rovina \cap 2. přímka
2. *procházející bodem*

3. osa mimoběžek $o \perp a$ $o \perp b$

(a) $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$

(b) $\varrho(a; \mathbf{w})$

(c) $A \in \varrho \cap b$

Metrické úlohy

Využívá se vztahů

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cos \varphi$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \sin \varphi$$

Vzdálenost bodu od roviny:

$$\varrho : ax + by + cz + d = 0 \Rightarrow v = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$P[p_1; p_2; p_3]$

Odchylka dvou přímek:

$$\cos \varphi = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|} \quad \vee \quad \operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right|,$$

kde \mathbf{u}, \mathbf{v} jsou směrové vektory daných přímek a k_1, k_2 jejich směrnice.

Odchylka přímky a roviny:

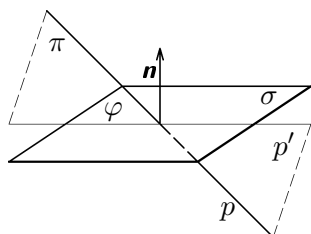
$$1. p \in \pi \perp \sigma \quad p' \in \pi \cap \sigma$$

$$\varphi(p; \sigma) = \varphi(p; p')$$

$$2. \mathbf{n}; \mathbf{p} \rightarrow \cos \psi \quad \psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

$$\cos \psi = \sin \varphi$$

$$\sin \varphi = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}|}{|\mathbf{n}| \cdot |\mathbf{p}|}$$



Odchylka dvou rovin:

- odchylka jejich normálových vektorů

10.1.5 Geometrie kuželoseček

Vznik: Řez rovinou na kuželové ploše

1. rovina \perp k ose kuželové plochy \Rightarrow **kružnice**
2. rovina svírá s osou úhel φ , pro který platí $\alpha < \varphi < 90^\circ$, kde α je úhel, který svírá hrana kužele s osou \Rightarrow **elipsa**
3. rovina svírá s osou úhel $\alpha \Rightarrow$ **parabola**
4. rovina svírá s osou úhel $\varphi < \alpha \Rightarrow$ **hyperbola**

Parabola

Def.: Množina všech bodů v rovině, které mají od daného bodu F a přímky d stejnou vzdálenost. ($F \notin d$)

Zoufalý výkřik slovenského strojevedoucího.

F ohnisko

d řídicí přímka

$p = |F, d| \dots$ poloparametr

$2p$ parametr

Vrcholová rce paraboly

- | | | |
|---------------------------------|-------------------------|-------------|
| 1. osa \parallel s osou x : | $y^2 = 2px$ | - $V[0; 0]$ |
| | $(y - n)^2 = 2p(x - m)$ | - $V[m; n]$ |
| 2. osa \parallel s osou y : | $x^2 = 2py$ | - $V[0; 0]$ |
| | $(x - m)^2 = 2p(y - n)$ | - $V[m; n]$ |

Obecná rce paraboly

$$\begin{cases} y^2 + Ax + By + C = 0 \\ x^2 + Ay + Bx + C = 0 \end{cases} \quad A \neq 0$$

Parametrické vyjádření

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = a \cdot t \end{cases}$$

pro $a > 0$; $t \in \mathbb{R}$ $a^2 = 2p$; vrchol v počátku, osa $\parallel x$

Vzájemná poloha bodu a paraboly

Věta: Má-li parabola, jejíž osa je rovnoběžná s některou souřadnou osou, rci $y^2 + Ax + By + C = 0$ nebo $x^2 + Ay + Bx + C = 0$ a označíme-li levou stranu této rce jako fci dvou proměnných $f(x; y)$, pak pro souřadnice libovolného bodu $L[x; y]$ platí:

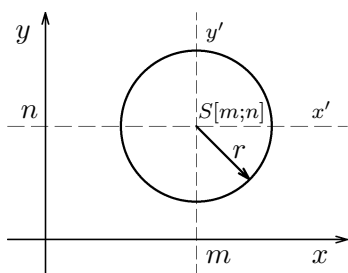
- $f(x; y) = 0 \dots L \in$ paraboly
- $f(x; y) > 0 \dots L$ leží vně paraboly
- $f(x; y) < 0 \dots L$ leží uvnitř paraboly

Vzájemná poloha přímky a paraboly

- nemají společný žádný bod
- mají společný právě jeden bod
 - přímka \parallel s osou paraboly
 - přímka je tečnou paraboly - rce tečny: $yy_1 = p(x + x_1)$
 $(y - n)(y_1 - n) = p(x + x_1 - 2m)$,
 kde $T[x_1; y_1]$ je bod dotyku
- mají právě 2 společné body \rightarrow přímka je sečnou paraboly

Kružnice

Def.: Množina všech bodů v rovině, které mají od daného bodu S stejnou vzdálenost.



Středová rce

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 \\ (x - m)^2 + (y - n)^2 &= r^2 \end{aligned}$$

Obecná rce

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

Parametrické vyjádření

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \varphi \\ y = r \cdot \sin \varphi \end{cases} \quad \varphi \in \langle 0; 2\pi \rangle \quad r \in \mathbb{R}^+$$

Rce tečny:

$$xx_1 + yy_1 = r^2$$

$$(x - m)(x_1 - m) + (y - n)(y_1 - n) = r^2,$$

kde $T[x_1; y_1]$ je bod dotyku.

Vzájemná poloha bodu a kružnice

Věta: Má-li kružnice rci $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ a označíme-li levou stranu této rce jako fci dvou proměnných $f(x; y)$, pak pro souřadnice libovolného bodu $L[x; y]$ platí:

1. $f(x; y) = 0 \dots L \in$ kružnice
2. $f(x; y) > 0 \dots L$ leží vně kružnice
3. $f(x; y) < 0 \dots L$ leží uvnitř kružnice

Elipsa

Def.: Množina všech bodů v rovině, které mají od dvou daných bodů (ohnisek) stejný součet vzdáleností.

$E, F \dots$ ohniska

$$|EF| = 2e$$

$e \dots$ excentricita

$A, B \dots$ vrcholy hlavní osy

$$a = |AS| = |BS|$$

$a \dots$ délka hlavní poloosy

$C, D \dots$ vrcholy vedlejší osy

$$b = |CS| = |DS|$$

$b \dots$ délka vedlejší poloosy

$$|EC| = a \quad \Rightarrow \quad a^2 = b^2 + e^2$$

Pro libovolný bod M elipsy nazveme úsečky ME, MF **průvodiče**. Z definice dostaneme vztah

$$|ME| + |MF| = 2a = \text{konst.}$$

Středová rce

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ \frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

Obecná rce

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

$$A, B \neq 0 \quad A \neq B$$

Parametrické vyjádření

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos \varphi \\ y = b \cdot \sin \varphi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a, b &\in \mathbb{R}^+ \\ \varphi &\in \langle 0; 2\pi \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = m + a \cdot \cos \varphi \\ y = n + b \cdot \sin \varphi \end{cases}$$

$$S[m; n]$$

Rce tečny:

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x - m)(x_1 - m)}{a^2} + \frac{(y - n)(y_1 - n)}{b^2} = 1, \text{ kde } T[x_1; y_1] \text{ je bod dotyku.}$$

Vzájemná poloha bodu a elipsy

Věta: Má-li elipsa rci $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ a označíme-li levou stranu této rce jako fci dvou proměnných $f(x; y)$, pak pro souřadnice libovolného bodu $L[x; y]$ platí:

1. $f(x; y) = 0 \dots L \in$ elipsy
2. $f(x; y) > 0 \dots L$ leží vně elipsy
3. $f(x; y) < 0 \dots L$ leží uvnitř elipsy

Průměr elipsy

Mějme rovnoběžné sečny elipsy. Středry těchto sečen tvoří úsečku procházející středem elipsy. Tuto úsečku nazveme **průměr**.

Hyperbola

Def.: Množina všech bodů v rovině, které mají od dvou daných bodů (ohnisek) stálý rozdíl vzdáleností.

$r, s \dots$ asymptoty

$$a^2 + b^2 = e^2$$

$$r : y = -\frac{b}{a}x \quad s : y = \frac{b}{a}x$$

Pro libovolný bod M hyperboly nazveme úsečky ME, MF **průvodiče**. Z definice dostaneme vztah

$$|MF| - |ME| = 2a = \text{konst.}$$

Středová rce

1. Hlavní osa \parallel s osou x

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$

2. Hlavní osa \parallel s osou y

$$-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$-\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1$$

Obecná rce

$$\begin{cases} Ax^2 - By^2 + Cx + Dy + E = 0 \\ Ay^2 - Bx^2 + Cx + Dy + E = 0 \end{cases}$$

$$A, B \neq 0$$

Rce tečny:

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x-m)(x_1-m)}{a^2} - \frac{(y-n)(y_1-n)}{b^2} = 1,$$

kde $T[x_1; y_1]$ je bod dotyku.

parametrické vyjádření

$$\begin{cases} x = \frac{a}{\cos \varphi} \\ y = b \cdot \operatorname{tg} \varphi \end{cases} \quad a, b \in \mathbb{R}^+$$

$$\varphi \in (0; 2\pi) - \left\{ \frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi \right\}$$

Vzájemná poloha bodu a hyperboly

Věta: Má-li hyperbola rci $Ax^2 - By^2 + Cx + Dy + E = 0$ nebo $Ay^2 - Bx^2 + Cx + Dy + E = 0$ a označíme-li levou stranu této rce jako fci dvou proměnných $f(x; y)$, pak pro souřadnice libovolného bodu $L[x; y]$ platí:

1. $f(x; y) = 0 \dots L \in$ hyperboly
2. $f(x; y) < 0 \dots L$ leží vně hyperboly
3. $f(x; y) > 0 \dots L$ leží uvnitř hyperboly

Rovnoosá hyperbola s asymptotami v osách x a y (graf nepřímé úměrnosti)

$$y = \frac{k}{x}, \text{ kde } |k| = \frac{a^2}{2}$$

$$\text{tečna: } y_1x + x_1y = 2k$$

Součin vzdáleností bodu hyperboly od asymptot je konstantní: $\frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$

Rce kuželosečky - obecně: $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$

10.1.6 Otočení soustavy souřadnic

transformační rce:

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ x = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{cases}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{C}{A - B}$$

koeficienty z obecné rce kuželoseček

10.1.7 Kulová plocha

Def.: Množina všech bodů v prostoru, které mají od daného bodu S stejnou vzdálenost.

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 + (z - p)^2 = r^2$$

Kapitola 11

Spojitosť fce

11.1 Základní vztahy

Okolí bodu:

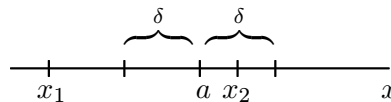
$$\cup_{\delta}(a) \hat{=} \cup(a, \delta)$$

δ ... velikost okolí

a ... bod

$$\cup_{\delta}(a) = (a - \delta; a + \delta)$$

$$\begin{aligned} x_1 &\notin \cup_{\delta}(a) \\ x_2 &\in \cup_{\delta}(a) \end{aligned} \Leftrightarrow |x_2 - a| < \delta$$



Pravé δ -okolí bodu a ... $\cup_{\delta}^{+} = \langle a; a + \delta \rangle$

Levé δ -okolí bodu a ... $\cup_{\delta}^{-} = (a - \delta; a \rangle$

Prstencové okolí a ... $P_{\delta}(a) = (a - \delta; a) \cup (a; a + \delta) \Leftrightarrow 0 < |x - a| < \delta$

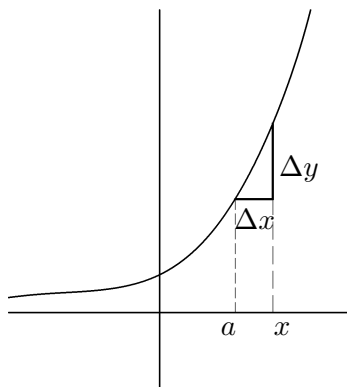
Přírůstek argumentu Δx :

Def.: Nechť je definováno $\cup_{\delta}(a)$. Přírůstek argumentu Δx je roven rozdílu $x - a$
 $x - a$... přírůstek argumentu v bodě a

Přírůstek fce Δy :

Def.: Fce je definovaná na $\cup_{\delta}(a)$. Rozdíl funkčních hodnot $f(x) - f(a)$ nazýváme přírůstkem fce v bodě a .

$$\Delta y = f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a)$$



Spojítost fce v bodě a :

Def.: Necht fce f je definována na množině \mathbb{J} . Fce f je spojitá v intervalu \mathbb{J} , právě když platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{J}; |f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

kde $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x - a| < \delta$, $f(x) \in U_\varepsilon(a)$

Věta: Jsou-li fce f a g spojité v bodě a , je spojitá i fce:

$$f + g \quad f - g \quad f \cdot g \quad \frac{f}{g} \quad (g(a) \neq 0)$$

Spojítost fce v intervalu:

Def.: Fce f je spojitá v bodě a zprava resp. zleva, právě když

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in U_\delta^\pm(a); |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Věta: Fce f je spojitá v bodě a , právě když je spojitá v bodě a zprava a zároveň zleva.

Věta: Fce f je spojitá v $(a;b)$ je-li spojitá v každém bodě $(a;b)$.

Věta: Fce f je spojitá v $\langle a;b \rangle$ je-li spojitá v každém bodě $(a;b)$ a zároveň zprava v a a zleva v b .

Weirstrassova věta: Je-li fce f spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a;b \rangle$, pak

$$\exists x_1, x_1 \in \langle a;b \rangle \text{ tak, že } \forall x \in \langle a;b \rangle; f(x_1) \leq f(x)$$

$$\exists x_2, x_2 \in \langle a;b \rangle \text{ tak, že } \forall x \in \langle a;b \rangle; f(x_2) \geq f(x)$$

Bod x_1 nazveme *minimem* a bod x_2 nazveme *maximem* fce f v intervalu $\langle a;b \rangle$.

Věta: Je-li fce f spojitá v $\langle a;b \rangle$ platí

$$f(a) \cdot f(b) < 0 \text{ pak } \exists c \in \langle a;b \rangle; f(c) = 0$$

Kapitola 12

Limity

12.1 Základní vztahy

Def.: Fce f má v bodě a limitu L jestliže k libovolně zvolenému bodu L existuje okolí bodu a tak, že $\forall x \neq a$ z tohoto okolí náleží hodnoty $f(x)$ zvolenému okolí bodu L .

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in P_\delta(a); |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$L = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Věta: Fce f má v bodě a nejvýše jednu limitu.

Věta: Fce f je v bodě a spojitá $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Věta o limitě dvou fcí: Jestliže $\forall x \in P_\delta(a); f(x) = g(x)$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ pak platí

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x-a}{x-a} \cdot \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$, kde P, P_1, Q a Q_1 jsou polynomy.

Věta o třech limitách: Necht' $\forall x \in P_\delta(a)$ a $f(x) < g(x) < h(x)$ a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$, pak existuje $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$

* $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$	* $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(kx)}{kx} = 1$	* $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{bx} = \frac{a}{b}$	* $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$
* $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$	* $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right) = \ln x$

Věta: Je-li $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, pak platí

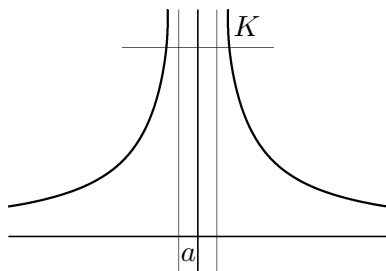
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A + B$
 - $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A - B$
 - $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \cdot B$
- $\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{A}{B}$,
pro $g(x), B \neq 0$

Jednostranné limity

Def.: Fce f má v bodě a limitu L zleva/zprava jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in P_{\delta}^{\pm}(a); |f(x) - L| < \varepsilon$$

Věta: Limita fce f v bodě a existuje právě když existují limity zprava a zleva a jsou si rovny.

Nevlastní limita v bodě

Def.: Fce f má v bodě a nevlastní limitu $+\infty$, jestliže ke každému číslu

$$K \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 \forall x \in P_{\delta}(a); f(x) > K$$

Fce f má v bodě a nevlastní limitu $-\infty$, jestliže ke každému číslu

$$K \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 \forall x \in P_{\delta}(a); f(x) < K$$

Def.: Fce f má v bodě a nevlastní limitu zprava/zleva $+\infty$, jestliže ke každému číslu

$$K \in (a; a + \delta)/(a - \delta; a) \exists \delta > 0 \forall x \in P_{\delta}(a); f(x) > K$$

Fce f má v bodě a nevlastní limitu zprava/zleva $-\infty$, jestliže ke každému číslu

$$K \in (a; a + \delta)/(a - \delta; a) \exists \delta > 0 \forall x \in P_{\delta}(a); f(x) < K$$

Vlastní limita v nevlastním bodě

Def.: Fce f má v $+\infty$ $\lim = L$, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_0 \in \mathbb{D}(f) \forall x \in \mathbb{R}; x > x_0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Fce f má v $-\infty$ $\lim = L$, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_0 \in \mathbb{D}(f) \forall x \in \mathbb{R}; x < x_0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Nevlastní limita v nevlastním bodě

Def.: Fce f má v $\pm\infty$ $\lim = \pm\infty$; $K > 0 \exists x_0 \in \mathbb{D}(f) \forall x \underset{>}{\geq} x_0; f_0(x) \underset{>}{\geq} K$

Asymptota fce

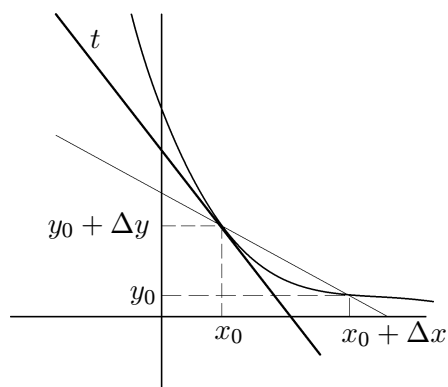
1. *se směrnicí:* Přímka $y = ax + b$ se nazývá asymptota se směrnicí grafu fce f , jestliže

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax)$$

2. *bez směrnice:* Přímka o rci $a = x$ (a - bod nespojitosti)

Tečna ke grafu fce



Směrnice tečny $k_s = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}$

Věta: Je-li křivka grafem fce $y = f(x)$ a existuje-li v bodě x_0 vlastní limita

$$k_s = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

pak tečna křivky v daném bodě $T[x_0; y_0]$ je přímka o rci $y - y_0 = k_s(x - x_0)$

$$y = k_s x + q$$

Normála: $y = -\frac{1}{k_s}x + q$

Při výpočtu limit jsou důležité tzv. *neurčité výrazy*. Celkem rozeznáváme neurčité výrazy typů $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, ∞^0 , 0^0 , 1^∞ . Tyto neurčité výrazy lze převést na tvar $\frac{0}{0}$ popř. $\frac{\infty}{\infty}$ a o limitě těchto dvou výrazů platí praktické tzv. **L'Hospitalovo pravidlo**.

L'Hospitalovo pravidlo

Věta: Nechť existují derivace fce f a g v bodě x_0 , kde $g'(x_0) \neq 0$ a $f(x_0) = g(x_0) = 0$, pak $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

a platí $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Věta: Jsou dány fce f a g . Nechť pro $x \rightarrow x_0$ představuje podíl $\frac{f(x)}{g(x)}$ neurčitý výraz typu $\frac{0}{0}$ popř. $\frac{\infty}{\infty}$.

Existuje-li $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ (vlastní či nevlastní), pak existuje také limita $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

Kapitola 13

Derivace

13.1 Základní vztahy

Def.: Nechť f je definována v okolí bodu x_0 . Jestliže existuje limita $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, pak ji nazýváme derivací fce f v bodě x_0 . Píšeme $f'(x_0)$.

Věta: Fce f má v intervalu $(a; b)$ derivaci, má-li derivaci v každém bodě tohoto intervalu.

Věta: Jestliže má fce v bodě x_0 derivaci, pak je v tomto bodě spojitá.

Jednostranná derivace:

Def.: Nechť je fce f definována v okolí bodu x_0 . Existuje-li $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, pak tuto limitu nazveme derivací f zleva/zprava v bodě x_0 .

Věta: Fce f má v intervalu $(a; b)$ derivaci, jestliže má derivaci v každém bodě $x \in (a; b)$ a v bodě a má derivaci zprava a v bodě b má derivaci zleva.

13.1.1 Derivace elementárních fci

I.	$y = c$	$y' = 0$
II.	$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
III.	$y = \sin x$	$y' = \cos x$
IV.	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
V.	$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
VI.	$y = \operatorname{cotg} x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
VII.	$y = e^x$	$y' = e^x$
VIII.	$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
IX.	$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
X.	$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$
XI.	$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
XII.	$y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
XIII.	$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
XIV.	$y = \operatorname{arccotg} x$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$

13.1.2 Pravidla pro počítání s derivacemi

Věta: Mají-li fce u a v v bodě x_0 derivaci, má v bodě x_0 derivaci i: $u + v$; $u - v$; uv ; $\frac{u}{v}$ ($v \neq 0$) a platí

$$\begin{array}{l} (u \pm v)' = u' \pm v' \\ (uv)' = u'v + uv' \\ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \\ (cu)' = cu' \end{array}$$

13.1.3 Derivace složené fce

Def.: Jestliže fce $z = g(x)$ má derivaci v bodě x_0 a jestliže fce $y = f(z)$ má derivaci v bodě $z_0 = g(x_0)$, má složená fce $y = f(g(x))$ derivaci v bodě x_0 a platí

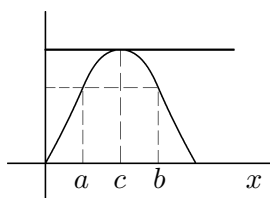
$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\begin{aligned} y &= f(x)^{g(x)} \\ y' &= f(x)^{g(x)} \left(g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right) \end{aligned}$$

13.1.4 Průběh funkce

Rolleova věta: Nechť fce f je spojitá v $\langle a; b \rangle$, v každém bodě tohoto intervalu má derivaci a $f(a) = f(b)$, pak

$$\exists c \in (a; b); f'(c) = 0 \quad \rightarrow \text{tečna v bodě } c \parallel x$$



Lagrangeova věta: *Zobecnění Rolleovy věty*

Nechť fce f je spojitá v $\langle a; b \rangle$ a má v každém bodě tohoto intervalu derivaci, pak

$$\exists c \in (a; b); f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \rightarrow \text{tečna } \parallel \text{ se spojnicí } ab$$

Věta: Je-li $f'(x) = 0$ pro $\forall x \in (a; b)$, pak je v $(a; b)$ f **konstantní**

Je-li $f'(x) > 0$ pro $\forall x \in (a; b)$, pak je v $(a; b)$ f **rostoucí**

Je-li $f'(x) < 0$ pro $\forall x \in (a; b)$, pak je v $(a; b)$ f **klesající**

Extrémy fce:

Je-li $f'(c) = 0$, daná fce je podezřelá, že má v bodě c extrém. Bod c se nazývá **stacionární bod**.

Def.: Fce f má v bodě x_0 lokální minimum existuje-li něj. okolí bodu x_0 , ve kterém platí

$$\forall x \in U_{x_0}; f(x) \geq f(x_0)$$

Fce f má v bodě x_0 lokální maximum existuje-li něj. okolí bodu x_0 , ve kterém platí

$$\forall x \in U_{x_0}; f(x) \leq f(x_0)$$

Ostré lokální maximum/minimum

$$\forall x \in P_{x_0}; \quad \begin{aligned} f(x) &< f(x_0) \\ f(x) &> f(x_0) \end{aligned}$$

Věta: Má-li fce f v bodě c lokální extrém, pak musí platit buď $f'(c) = 0$ nebo v bodě c není derivace.

Věta: Necht' $f'(x_0) = 0$ a necht' v x_0 existuje i druhá derivace. Je-li

$$\begin{aligned} f''(x_0) < 0; \quad x_0 &\rightarrow \text{lokální maximum} \\ f''(x_0) > 0; \quad x_0 &\rightarrow \text{lokální minimum} \end{aligned}$$

Def.: Necht' M je množina reálných čísel. Číslo β se nazývá **supremum** (*horní hranice*) množiny M platí-li:

1. $\forall x \in M; x \leq \beta$
2. Má-li něj. γ takovou vlastnost, že $\forall x \in M; x \leq \gamma \Rightarrow \beta \leq \gamma$

Def.: Necht' M je množina reálných čísel. Číslo α se nazývá **infimum** (*dolní hranice*) množiny M platí-li:

1. $\forall x \in M; x \geq \alpha$
2. Má-li něj. δ takovou vlastnost, že $\forall x \in M; x \geq \delta \Rightarrow \alpha \geq \delta$

Konvexnost a konkávnost fce:

Def.: Fce f je konvexní v bodě x_0 , jestliže $\forall x \in P_{x_0}$ platí, že všechny body grafu fce f leží "nad" tečnou v bodě x_0 .

Fce f je konkávní v bodě x_0 , jestliže $\forall x \in P_{x_0}$ platí, že všechny body grafu fce f leží "pod" tečnou v bodě x_0 .

Věta: Jestliže je fce f konvexní/konkávní v každém bodě intervalu, je konvexní/konkávní v tom intervalu.

Věta: Je-li $f''(x) > 0$ je fce v x konvexní

Je-li $f''(x) < 0$ je fce v x konkávní

Je-li $f''(x) = 0$ je fce podezřelá z toho, že bod x je **inflexní**

Def.: Inflexní bod fce f je takový bod x_0 , ve kterém fce přechází z polohy "nad" tečnou do polohy "pod" tečnou nebo naopak.

"Jsou-li obě derivace nulové, pak víme o dané fci v bodě kulový."

Postup při vyšetřování průběhu fce:

- I. Určit $\mathbb{D}(f)$ (sudost, lichost, periodičnost, ...)
- II. Výpočet limit v nevlastních bodech a v bodech nespojitosti fce
- III. Průsečíky s osami
- IV. 1. derivace \Rightarrow extrémy, intervaly monotónosti
- V. 2. derivace \Rightarrow inflexní body, křivost fce
- VI. Asymptoty fce
- VII. Určit $\mathbb{H}(f)$
- VIII. Graf

Kapitola 14

Integrální počet

14.1 Základní vztahy

Primitivní fce

Def.: Jsou dány dvě fce F, f v otevřeném intervalu \mathbb{J} . Platí-li $\forall x \in \mathbb{J}; F'(x) = f(x)$, pak fci F nazveme primitivní fci k fci f .

Věta: Jestliže je fce f spojitá na $\langle a; b \rangle$, pak má primitivní fci.

Věta: Je-li fce F primitivní k fci f , pak každá primitivní fce k fci f lze zapsat ve tvaru $F(x) + C$, kde C je reálná konstanta.

píšeme:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

$\int \dots$ integrační znak

$dx \dots$ integrační proměnná

$f(x) \dots$ itegrand = integrovaná fce

Věta: Existuje-li v otevřeném intervalu \mathbb{J} primitivní fce k fcím $f_1(x); f_2(x)$ a jsou-li $C_1; C_2$ libovolné konstanty, pak existuje i primitivní fce k fci $f(x) = C_1f_1(x) + C_2f_2(x)$ a platí

$$\int f(x)dx = \int [C_1f_1(x) + C_2f_2(x)]dx = \int C_1f_1(x)dx + \int C_2f_2(x)dx = C_1 \int f_1(x)dx + C_2 \int f_2(x)dx$$

14.1.1 Integrační metody

1. metoda **Per partes**

Věta: Mají-li fce $u(x)$ a $v(x)$ v intervalu $(a; b)$ spojitě derivace, pak v $(a; b)$ platí

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

2. metoda **Substituční**

Věta: Nechť fce φ má derivaci na intervalu $(\alpha; \beta)$. Fce $F(t)$ je primitivní k fci $f(t)$ na $(a; b)$. Nechť $\forall x \in (\alpha; \beta); \varphi(x) \in (a; b)$. Potom fce $y = F(\varphi(x))$ je primitivní k fci $y = f(\varphi(x))\varphi'(x)$ na $(\alpha; \beta)$.

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(u)du,$$

kde $u = \varphi(x)$ a $du = \varphi'(x)dx$

I.	$y = c$	$y = c \cdot x$	$+C$	\mathbb{R}
II.	$y = x^n$	$y = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$+C$	$\mathbb{R} - \{0\}; n \in \mathbb{N}$
III.	$y = x^{-1}$	$y = \ln x $	$+C$	$\mathbb{R} - \{0\}$
IV.	$y = e^x$	$y = e^x$	$+C$	\mathbb{R}
V.	$y = a^x$	$y = \frac{a^x}{\ln a}$	$+C$	$\mathbb{R}; a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$
VI.	$y = \cos x$	$y = \sin x$	$+C$	\mathbb{R}
VII.	$y = \sin x$	$y = -\cos x$	$+C$	\mathbb{R}
VIII.	$y = \frac{1}{\cos^2 x}$	$y = \operatorname{tg} x$	$+C$	$\mathbb{R} - \{\frac{k\pi}{2}\}; k \in \mathbb{Z}$
IX.	$y = \frac{1}{\sin^2 x}$	$y = -\operatorname{cotg} x$	$+C$	$\mathbb{R} - \{k\pi\}$
X.	$y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arcsin x$	$+C$	$(-1; 1)$
XI.	$y = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arccos x$	$+C$	$(-1; 1)$
XII.	$y = \frac{1}{1+x^2}$	$y = \operatorname{arctg} x$	$+C$	\mathbb{R}
XIII.	$y = -\frac{1}{1+x^2}$	$y = \operatorname{arccotg} x$	$+C$	\mathbb{R}
XIV.	$y = \frac{f'(x)}{f(x)}$	$y = \ln f(x) $	$+C$	

14.1.2 Integrace podílu racionálních fcí

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}$$

1. Je-li $P(x)$ stupně vyššího nebo rovného $Q(x)$, pak vydělíme $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - dostaneme $M(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$, kde $R(x)$ je zaručeně stupně nižšího než $Q(x)$.
2. Pro $P(x)$ resp. $R(x)$ stupně nižšího než $Q(x)$:

Každý mnohočlen $Q(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$ s reálnými koeficienty, lze rozložit:

$$Q(x) = a_m (x - \alpha_1)^{k_1} \cdot (x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x - \alpha_i)^{k_i} \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} \cdot (x^2 + p_2 x + q_2)^{l_2} \dots (x^2 + p_j x + q_j)^{l_j},$$

kde α, p, q jsou reálná čísla, k_1, k_2, \dots, k_i značí násobnost kořene polynomu a výrazy $x^2 + px + q$ mají záporný diskriminant. (Pozn. Jestliže je něj. kořen komplexní, musí existovat i komplexně sdružený)

Věta: Nechť $\frac{P(x)}{Q(x)}$ je ryze lomená racionální fce s reálnými koeficienty a $Q(x) = a_m (x - \alpha_1)^{k_1} \cdot (x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x - \alpha_i)^{k_i} \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} \cdot (x^2 + p_2 x + q_2)^{l_2} \dots (x^2 + p_j x + q_j)^{l_j}$, pak existují taková reálná čísla $A_1, A_2, \dots, A_k, B_1, B_2, \dots, B_k, C_1, C_2, \dots, C_k, D_1, D_2, \dots, D_k, \dots$, že pro všechna x různá od nulových bodů mnohočlenu $Q(x)$ platí

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \frac{A_2}{(x - \alpha_1)^2} + \frac{A_3}{(x - \alpha_1)^3} + \dots + \frac{B_1}{x - \alpha_2} + \frac{B_2}{(x - \alpha_2)^2} + \dots + \frac{C_1 x + D_1}{x^2 + p_1 x + q_1} \\ & + \frac{C_2 x + D_2}{(x^2 + p_1 x + q_1)^2} + \dots + \frac{E_1 x + F_1}{x^2 + p_2 x + q_2} + \frac{E_2 x + F_2}{(x^2 + p_2 x + q_2)^2} + \dots \end{aligned}$$

Pozn.: Jestliže se mají rovnat dva polynomy, musí si být rovný koeficienty u stejných mocnin.

14.1.3 Některé "tabulkové" substituce

$$* \int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \int \frac{1}{(a-x)(a+x)} dx = \int \left(\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a+x} \right) \frac{1}{2a} dx = \frac{1}{2a} (\ln |a+x| - \ln |a-x|) + C$$

$$* \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

1.

$$\int \frac{dx}{|a| \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}$$

2. $x = a \cdot \sin u \quad dx = a \cdot \cos u du$

$$\int \frac{a \cos u du}{\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 u}} = \int du = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$* \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$$

$$x = a \cdot \operatorname{tg} u = a \cdot \frac{\sin u}{\cos u} \quad dx = a \cdot \frac{1}{\cos^2 u} du$$

$$* \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln |\sqrt{x^2 + k} + x| + C$$

$$\sqrt{x^2 + k} = t - x \quad dx = \frac{t^2 + k}{2t^2} dt \quad x = \frac{t^2 - k}{2t}$$

$$* \int x^2 \sqrt{2 - x^2} dx = 2t - \frac{\sin 4t}{2} + C,$$

$$\text{kde platí } x = 2 \sin t \quad dx = 2 \cos t dt$$

Substituce za $\sin x$; $\cos x$ pokud se vyskytují ve jmenovateli, nebo jakožto poslední výkřik zoufalství:

1. pro sudé mocniny1. pro liché mocniny

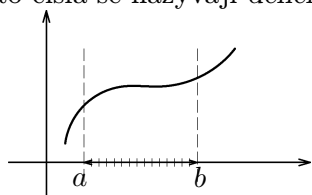
$$\begin{aligned} t &= \operatorname{tg} x \\ dx &= \frac{dt}{1+t^2} \\ \sin^2 x &= \frac{t^2}{t^2+1} \\ \cos^2 x &= \frac{1}{t^2+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t &= \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ dx &= \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x &= \frac{2t}{t^2+1} \\ \cos x &= \frac{1-t^2}{t^2+1} \end{aligned}$$

A ještě některé (konkrétně 3) mnohem horší můžeme nalézt v sešitě.

14.1.4 Určitý integrál

Def.: Je-li uzavřený interval $\langle a; b \rangle$ a $x_0; x_1; \dots; x_n$ konečná posloupnost $n+1$ čísel, pro něž platí, že $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, pak říkáme, že je dáno rozdělení intervalu $\langle a; b \rangle$ určené čísly x_0 až x_n . Tato čísla se nazývají *dělicí body*.

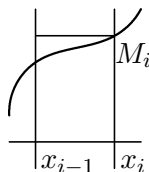
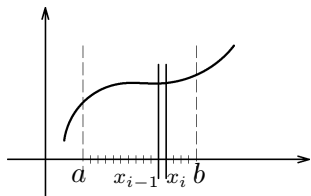


$$\mathcal{D}(x_0, x_1, \dots, x_n)$$

Def.: Nechť fce f je spojitá na intervalu $\langle a; b \rangle$ a je v tomto intervalu omezená, potom nazveme

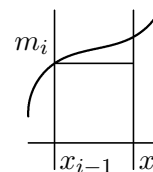
$$S(f, \mathcal{D}) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$$

horní součet příslušný k fci f a k dělení \mathcal{D} , kde M_i je suprémum f v $\langle a; b \rangle$.



Def.: Nechť fce f je spojitá na intervalu $\langle a; b \rangle$ a je v tomto intervalu omezená, potom nazveme

$$s(f, \mathcal{D}) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1})$$



dolní součet příslušný k fci f a k dělení \mathcal{D} , kde m_i je infimum f v $\langle a; b \rangle$.

Věta: Množina všech horních/dolních součtů příslušných dané omezené fci f na $\langle a; b \rangle$ a ke všem možným dělením \mathcal{D} intervalu $\langle a; b \rangle$ je omezená.

Def.: Nechť \mathcal{D} ; \mathcal{D}^* jsou dvě rozdělení $\langle a; b \rangle$. Budeme říkat, že \mathcal{D}^* je zjemněním rozdělení \mathcal{D} , jestliže každý dělicí bod rozdělení \mathcal{D} je zároveň dělicím bodem \mathcal{D}^* .

Věta: Je-li \mathcal{D}^* zjemněním rozdělení \mathcal{D} , pak

$$S(f, \mathcal{D}^*) \leq S(f, \mathcal{D})$$

Věta: Nechť jsou dána dvě rozdělení $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ v intervalu $\langle a; b \rangle$, pak platí

$$s(f, \mathcal{D}_1) \leq S(f, \mathcal{D}_2)$$

Věta: Existuje suprémum/infimum všech dolních/horních součtů příslušných fci f a ke všem možným rozdělením \mathcal{D} .

Def.: Suprémum množiny všech dolních součtů příslušných k omezené fci f definované na $\langle a; b \rangle$ a ke všem možným rozdělením tohoto intervalu, budeme nazývat *dolní Riemannův integrál*.

$$\int_a^b f(x) dx$$

Def.: Infimum množiny všech horních součtů příslušných k omezené fci f definované na $\langle a; b \rangle$ a ke všem možným rozdělením tohoto intervalu, budeme nazývat *horní Riemannův integrál*.

$$\int_a^b f(x) dx$$

Věta:

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx$$

Def.: Budeme říkat, že fce f je integrovatelná (dle Riemanna) na $\langle a; b \rangle$ právě když platí

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Společnou hodnotu dolního a horního integrálu budeme nazývat **Riemannův integrál** na $\langle a; b \rangle$ a budeme ho označovat

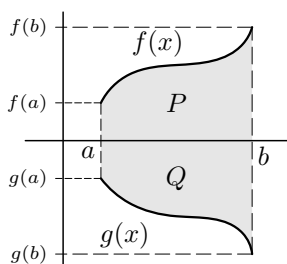
$$({}_R) \int_a^b f(x) dx$$

vlastnosti:

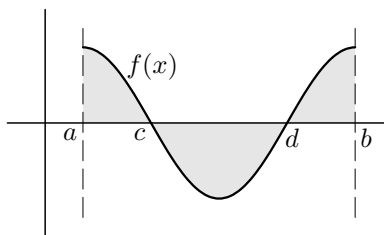
$$* \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$* \int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx$$

$$* g(x) = -f(x) \rightarrow \int_a^b f(x) dx = P \quad \wedge \quad \int_a^b g(x) dx = Q \quad \Rightarrow \quad P = -Q$$

Plocha vytvořená fci pod osou x je záporná a nad osou x je kladná.

$$* P = \int_a^c f(x) dx + \left| \int_c^d f(x) dx \right| + \int_d^b f(x) dx$$

**Věta:** Je-li fce f nezáporná spojitá na $\langle a; b \rangle$ potom platí

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

Věta: Mějme 2 fce f a g spojitě na $\langle a; b \rangle$ a platí $\forall x \in \langle a; b \rangle; f(x) \leq g(x)$ potom

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Newton-Leibnitzova věta:

Nechť f je spojitá na $\langle a; b \rangle$, nechť existuje primitivní fce $F(x)$ fce $f(x)$, pak platí

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Pozn.: Častěji se používá zápis:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

Věta: Při záměně mezí platí:

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

Substituce určitého integrálu:

Věta: Nechť máme fci $t = g(x)$ a nechť $g'(x)$ je spojitá v $\langle a; b \rangle$. Je-li fce $f(t)$ je spojitá $\forall t = g(x)$, pak platí

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$$

Metoda **Per partes:**

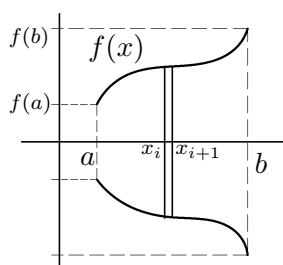
Věta: Jsou-li $u'(x)$, $v'(x)$ spojitě v $\langle a; b \rangle$, potom platí

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Věta: Obsah obrazce ohraničeného dvěma (nebo i více) křivkami se vypočítá podle vztahu

$$S = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

Objem rotačního tělesa:



$$V = \sum_{i=1}^n V_i = \sum_{i=1}^n \pi f^2(x_i) \cdot \overbrace{(x_{i+1} - x_i)}^{dx}$$

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Objem tělesa vzniklého rotací plochy ohraničené dvěma fcemi kolem osy x , když se tato plocha osy x "nedotýká" (vznikne např. toroid), vypočteme podle vztahu

$$V = \pi \int_a^b (f^2(x) - g^2(x))dx$$

Délka křivky:

Věta: Nechť fce f je fce, která má v $\langle a; b \rangle$ spojitou derivaci. Množinou bodů \mathbb{E} míníme uspořádané dvojice $[x; y]$, kde $y = f(x)$ a $x \in \langle a; b \rangle$, $\mathbb{E} = \{[x; y]; y = f(x); a \leq x \leq b\}$, pak platí, že délka l křivky, kterou popisuje množina \mathbb{E} má velikost

$$l_{\mathbb{E}} = \int_a^b \sqrt{1 + (f(x)')^2} dx$$

Povrch rotačního tělesa:

Věta: Nechť je fce f definována na $\langle a; b \rangle$ a má spojitou derivaci. Je dána množina $\mathbb{A} = \{[x; y; z]; a \leq x \leq b; \sqrt{y^2 + z^2} = f(x)\}$, potom se plocha, vyznačená rotací \mathbb{A} kolem osy x vypočítá podle vztahu

$$P_{\mathbb{A}} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f(x)')^2} dx$$

- kvadratura** ... výpočet plochy pod křivkou
- kubatura** ... výpočet objemu rotačního tělesa
- rektifikace** ... výpočet délky křivky
- komplanace** ... výpočet povrchu rotačního tělesa

Obsah

1	Základní poznatky z matematiky	1
1.1	Základní vztahy	1
1.1.1	Číselné obory	1
1.1.2	Obor přirozených čísel	1
1.1.3	Základní vlastnosti racionálních čísel	2
1.1.4	Množiny	2
1.1.5	Základy výrokové logiky	3
1.1.6	Elementární teorie čísel	5
1.1.7	Výrokové formy; rovnice	5
1.1.8	Relace	5
2	Funkce	7
2.1	Základní vztahy	7
2.1.1	Racionální fce	8
2.1.2	Mocninná fce	9
2.1.3	Exponenciální fce	10
2.1.4	Logaritmická fce	10
2.1.5	Složená fce	11
3	Goniometrické funkce	12
3.1	Základní vztahy	12
3.1.1	Funkce sinus a cosinus	12
3.1.2	Fce tg a cotg	13
3.1.3	Cyklometrické fce	13
3.1.4	Trigonometrie	14
4	Stereometrie	15
4.1	Základní vztahy	15
5	Kombinatorika	17
5.1	Základní vztahy	17
5.1.1	Variace	17
5.1.2	Permutace	17
5.1.3	Kombinace	17
5.1.4	Pascalův trojúhelník	18
5.1.5	Variace s opakováním	18
5.1.6	Permutace s opakováním	18
5.1.7	Kombinace s opakováním	19

6	Pravděpodobnost	20
6.1	Základní vztahy	20
6.1.1	Pravděpodobnost	20
6.1.2	Pravděpodobnost jevů	20
6.1.3	Sčítání pravděpodobností	21
6.1.4	Nezávislé jevy	21
6.1.5	Nezávislé pokusy	21
6.1.6	Binomické rozdělení (Bernoulliovo schéma)	21
6.1.7	Podmíněné pravděpodobnosti	22
7	Statistika	23
7.1	Základní vztahy	23
7.1.1	Termíny	23
7.1.2	Charakteristika polohy a variability	23
8	Posloupnosti a řady	25
8.1	Základní vztahy	25
8.1.1	Vlastnosti posloupností	25
8.1.2	Matematická indukce	26
8.1.3	Aritmetická posloupnost	26
8.1.4	Geometrická posloupnost	26
8.1.5	Finanční matematika	26
8.1.6	Vlastnosti aritmetických a geometrických posloupností	27
8.1.7	Limita poloupnosti	28
8.1.8	Nevlastní limita	29
8.1.9	Nekonečná řada	29
9	Komplexní čísla	30
9.1	Základní vztahy	30
9.1.1	Algebraický tvar komplexního čísla	30
9.1.2	Goniometrický tvar komplexního čísla	31
9.1.3	Řešení nerovnic	31
9.1.4	Binomická rovnice	31
9.1.5	Kvadratické rce s reálnými koeficienty	31
9.1.6	Kvadratické rce s komplexními koeficienty	32
9.1.7	Reciproké rovnice	32
9.1.8	Exponenciální tvar komplexního čísla: $z = z e^{i\varphi}$	32
10	Analytická geometrie	33
10.1	Základní vztahy	33
10.1.1	Souřadnice	33
10.1.2	Vektory	34
10.1.3	Geometrie v rovině	36
10.1.4	Geometrie v prostoru	37
10.1.5	Geometrie kuželoseček	38
10.1.6	Otočení soustavy souřadnic	42
10.1.7	Kulová plocha	42
11	Spojitosť fce	43
11.1	Základní vztahy	43
12	Limity	45
12.1	Základní vztahy	45

<i>OBSAH</i>	60
13 Derivace	48
13.1 Základní vztahy	48
13.1.1 Derivace elementárních fcí	48
13.1.2 Pravidla pro počítání s derivacemi	49
13.1.3 Derivace složené fce	49
13.1.4 Průběh funkce	49
14 Integrální počet	51
14.1 Základní vztahy	51
14.1.1 Integrační metody	51
14.1.2 Integrace podílu racionálních fcí	52
14.1.3 Některé "tabulkové" substituce	53
14.1.4 Určitý integrál	53